

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ДОРЖИ БАНЗАРОВА

И.С.Поломошнов

**«Метод математической индукции и комбинаторика:
учебное пособие по дискретной математике»**

*Рекомендовано Экспертным советом университета в качестве
учебного пособия для обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03
«Прикладная информатика»,
10.05.03 «Безопасность открытых информационных систем»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем
09.02.01.02 «Компьютерные системы и комплексы»,
09.02.07.02 «Информационные системы и программирование»*

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета им. Доржи Банзарова
2026

УДК _____
ББК _____

Утверждено к печати Экспертным советом университета
Протокол № ____ от « ____ » _____ 2026 г.

Рецензенты

Л.А.Телешева

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Института математики, физики и компьютерных наук БГУ им. Доржи Банзарова

Поломошнов И.С.

Метод математической индукции и комбинаторика: учебное пособие по дискретной математике: учебное пособие.

— Улан-Удэ: Издательство Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 2026. — 45 с.

ISBN

В учебном пособии рассмотрены принцип математической индукции, его обоснование через аналогию с домино и структура доказательства по индукции. Особое внимание уделяется применению метода для доказательства кратности, делимости, равенств, неравенств и вычисления сумм, а также разбору сильной (полной) индукции и типичных ошибок. Пособие содержит подробные примеры решения задач по всем указанным типам, упражнения для самопроверки и задания для самостоятельного решения. Материал направлен на формирование у обучающихся навыков строгого математического доказательства с использованием метода математической индукции.

Пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 10.05.03 Безопасность открытых информационных систем, 09.02.01.02 Компьютерные системы и комплексы, 09.02.07.02 Информационные системы и программирование, 09.02.11.02 Разработка и управление программным обеспечением

УДК _____
ББК _____

© И.С.Поломошнов, 2026
©Бурятский госуниверситет
имени Доржи Банзарова, 2026

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ	11
1.1. Теоретический раздел	11
1.1.1. Принцип математической индукции.....	11
1.1.2. Метод математической индукции	11
1.1.3. Проблема полной проверки	12
1.1.4. Идея индукции.....	12
1.1.5. Формулировка принципа математической индукции	13
1.1.6. Структура доказательства по индукции	17
1.1.7. Чего нельзя делать при проверке базы.	18
1.1.8. Объём проверки.....	18
1.1.9. Индукционное предположение.....	18
1.1.10. Индукционный шаг (переход)	20
1.1.11. Распространённые ловушки индукционного шага.....	21
1.1.12. Завершение индукционного шага.	21
1.1.13. Классический пример: сумма арифметической прогрессии ...	22
1.1.14. Пример с неравенством	23
1.1.15. Типичные ошибки.....	23
1.1.16. Обобщения метода.....	24
1.1.17. Сильная (полная) индукция	24
1.1.18. Заключение	24
1.1.19. Упражнения для самопроверки	26
1.2. Практический раздел.....	27
1.2.1. Задачи на доказательство кратности и делимости	27
1.2.2. Задачи на доказательство равенств и неравенств	27
1.2.3. Задачи на вычисление сумм.....	28
1.2.4. Примеры решения задач на доказательство делимости методом математической индукции	29
1.2.5. Примеры решения задач на доказательство кратности методом математической индукции	31
1.2.6. Примеры решения задач на доказательство равенств и неравенств методом математической индукции.....	33
1.2.7. Примеры решения задач на нахождение суммы методом	

математической индукции	41
1.2.8. Примеры решения задач на доказательство некоторых утверждений из курса «Математический анализ».....	42
1.2.9. Задачи для самостоятельного решения.....	44
ГЛАВА 2. ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ: ПРАВИЛА И ПРИНЦИПЫ	46
2.1. Теоретический раздел	46
2.1.1. Основные правила комбинаторики (Сумма, Произведение).....	46
2.1.2. Принцип Дирихле	48
2.1.3. Формула включений и исключений	50
2.1.4. Основные комбинаторные схемы.....	52
2.1.5. Биномиальные коэффициенты.....	58
2.1.6. Комбинаторные тождества.....	62
2.1.7. Специальные комбинаторные числа	63
2.1.8. Числа Фибоначчи	64
2.1.9. Числа Каталана	65
2.1.10. Субфакториал и задача о беспорядках	67
1.2. Практический раздел.....	69
Задачи для самостоятельного решения.....	69
Ответы и указания.....	73
Приложение. Справочник формул	79
Рекомендуемая литература для студентов	82
Библиографический список	82

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание представляет собой учебное пособие для дисциплины Дискретная математика в рамках реализации образовательных программ высшего образования по направлениям подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 10.05.03 Безопасность открытых информационных систем; средне-профессионального образования по направлениям подготовки 09.02.01.02 Компьютерные системы и комплексы, 09.02.07.02 Информационные системы и программирование, 09.02.11.02 Разработка и управление программным обеспечением очной формы обучения и подготовлено в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС).

Дисциплина Дискретная математика относится к обязательным дисциплинам базовой части Блока Б1 в структуре образовательной программы.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные комбинаторные объекты и комбинаторные числа, их свойства;
- основы теории графов: способы представления, виды графов, их свойства;
- основы теории булевых функций: способы задания булевых функций, разложение функций по переменным, совершенные нормальные формы, замкнутые классы булевых функций, критерий полноты множества булевых функций;
- особенности функций k -значной логики;
- основы теории кодирования: алфавитное кодирование, равномерное кодирование, оптимальное кодирование;
- отличие схем из функциональных элементов от термов, методы синтеза схем;
- основы теории конечных автоматов: детерминированные и ограниченно-детерминированные функции, способы задания таких функций, конечные автоматы, автоматные функции, схемы из логических элементов и элементов задержки.

Уметь:

- решать простейшие задачи комбинаторного характера;
- находить для произвольной булевой функции представление в виде СДНФ, СКНФ, полинома Жегалкина;
- проверять произвольное множество булевых функций на полноту;
- определять взаимную однозначность алфавитного кодирования;
- строить оптимальные коды;
- строить схемы из функциональных элементов для произвольной булевой функции;
- построить для ОДФ диаграмму Мура, каноническую таблицу, канонические уравнения;

Владеть:

методологией и навыками решения научных и практических задач.

Планируемые результаты освоения образовательной программы:

ОК 01. - Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

Основной задачей настоящего учебного пособия является систематическое изучение метода математической индукции и основ комбинаторики в рамках дисциплины «Дискретная математика».

Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена методу математической индукции: в ней изложены основные понятия, идея и обоснование метода, формулировка и структура индуктивного доказательства, а также даны сведения о сильной (полной) индукции, типичных ошибках и методических примечаниях. Вторая часть содержит введение в комбинаторику: правила суммы и произведения, принцип Дирихле, формулу включений и исключений, а также основные комбинаторные схемы — размещения, перестановки, сочетания (без повторений и с повторениями) и биномиальные коэффициенты. Доказательства ключевых комбинаторных утверждений последовательно опираются на аппарат математической индукции, что обеспечивает единство изложения.

Практический раздел пособия включает подробный разбор типовых задач (доказательство тождеств, неравенств, делимости и комбинаторных соотношений), упражнения для самопроверки и набор заданий для

самостоятельного решения. Пособие содержит список рекомендуемой литературы для студентов и библиографический список. Материал направлен на формирование у обучающихся навыков строгого математического доказательства и комбинаторного мышления. Предназначено для студентов высших учебных заведений, изучающих дискретную математику, и может быть использовано как на аудиторных занятиях, так и для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Представьте, что прямо сейчас, не имея под рукой мощного процессора, вам предложили бы за минуту сложить все нечётные числа от единицы до девяносто девяти. Вы, скорее всего, сбились бы уже на четвёртом десятке и бросили бы затею. Теперь вообразите спор: кто-то утверждает, что сумма первых n нечётных чисел всегда равна n^2 . Проверить на единице легко, на тройке и пятёрке — тоже. Но как доказать, что это утверждение не «сломается» на каком-нибудь, пусть астрономически далёком, но конечном n , которое никто никогда вручную перебирать не станет?

Именно для таких ситуаций существует метод математической индукции. За сухой трёхэтапной конструкцией — база, предположение, переход — часто теряется интеллектуальное чудо, ради которого метод и был формализован. Чудо состоит вот в чём: мы получаем право распространить достоверный вывод на бесконечное множество объектов, проделав лишь конечное количество логических операций. Это не столько техника проверки, сколько инструмент «упаковки» бесконечности в обозримый силлогизм.

Теперь сменим оптику. Представьте, что вас просят ответить на вопрос: сколькими способами можно выбрать три книги с полки, на которой их двенадцать? Или: сколько различных «слов» (пусть и бессмысленных) можно составить перестановкой букв слова «МАТЕМАТИКА»? Или даже так: компания из десяти человек обменивается рукопожатиями — сколько всего рукопожатий произойдёт, если каждый пожмёт руку каждому ровно один раз?

На первый взгляд, между доказательством формулы суммы нечётных чисел и подсчётом рукопожатий нет ничего общего. Но это лишь иллюзия. Обе задачи принадлежат дискретной математике — области, работающей с конечными и счётными структурами, где ничего нельзя «приблизить», а можно только пересчитать или доказать точно. И обе требуют одного и того же навыка: умения рассуждать строго, переходя от частного к общему без потери достоверности.

Комбинаторика — это искусство считать. Но не в смысле арифметического складывания, а в смысле выведения общих формул подсчёта, справедливых для целых классов ситуаций. Она отвечает на

вопросы «сколько?» и «сколькими способами?» до того, как мы начнём перебирать варианты вручную. И в этом её парадокс: чтобы посчитать, не пересчитывая, нужна особая дисциплина ума. Правило суммы и правило произведения кажутся тривиальными, пока дело не доходит до задач, где слова «и» и «или» начинают ветвиться в древовидные структуры, а интуиция толкает к неверному ответу. Сочетания с повторениями через «шары и перегородки» — изящнейшая техника, которая превращает, казалось бы, безнадёжный перебор в краткую биекцию. Формула включений и исключений заставляет взглянуть на пересекающиеся множества без двойного счёта. Всё это — инструменты, которые студент должен не просто запомнить, а прожить на задачах.

Но стоит нам задаться целью доказать, что некая комбинаторная формула работает для любого n , а не только для удобных малых чисел, — мы немедленно возвращаемся к методу математической индукции. Треугольник Паскаля, бином Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов, рекуррентные соотношения для чисел Фибоначчи и чисел Каталана — всё это держится на индуктивном каркасе. Индукция и комбинаторика, таким образом, не два независимых раздела, а два сообщающихся сосуда: комбинаторика рождает гипотезы и объекты, индукция — доказывает их свойства и скрепляет конструкцию.

Именно поэтому данное пособие объединяет обе темы. Мы будем относиться к индукции не как к ритуальной последовательности действий, а как к аккуратной логической конструкции, где главная уязвимость — не арифметическая ошибка, а неверная сборка перехода. Именно в переходе, а не в базе, тонет большинство «псевдодоказательств», включая знаменитые софизмы про лошадей одного цвета. Разбирая такие сбои, мы учимся диагностировать, в какой точке неосторожное слово разрушает всю конструкцию. И почти сразу применим эту зоркость к доказательству комбинаторных теорем, где цена ошибки — неверная формула, а значит, и неверный ответ в задаче подсчёта.

Материал разделён на два связанных контура. Первый контур — детализация самого принципа индукции: зачем нужен переход от $P(k)$ к $P(k+1)$, возможна ли база не с единицы, как работает сильная индукция и почему метод неприменим к несчётным множествам. Второй контур — собственно комбинаторика: правила суммы и произведения, принцип Дирихле, размещения, перестановки, сочетания (без повторений и с

повторениями), биномиальные коэффициенты и комбинаторные тождества. Доказательства идут рука об руку: почти каждое ключевое утверждение комбинаторики доказывается двумя способами — конструктивным комбинаторным рассуждением и индукцией, чтобы студент видел, как один и тот же результат по-разному высвечивается в лучах двух методов.

Цель пособия — не просто подготовить студента к типовому зачёту. Цель — дать ему ощущение, что математическая индукция перестаёт быть «методом» и превращается в способ мышления, а комбинаторика — из набора формул, которые вечно путаются, становится стройной системой с ясными внутренними связями. После такого погружения формулировка «докажите для любого натурального n » перестаёт пугать, а задача «сколькими способами?» перестаёт вызывать желание угадать ответ.

От читателя потребуется лишь одно: готовность отложить калькулятор и разрешить себе ошибаться на этапе первых проб. Материал выстроен так, чтобы ошибка становилась не поводом для снижения балла, а диагностическим сигналом. Исправляя такой зазор самостоятельно, студент неизбежно приходит к тому уровню владения предметом, при котором и доказательство по индукции, и комбинаторный подсчёт перестают нуждаться в подсказках, а начинают требовать только внимания.

Наконец, мы старались показать, что индукция и комбинаторика — не изолированные приёмы, которые сдают и забывают сразу после первого семестра. Они незаметно прошивают весь курс дискретной математики: от анализа рекуррент и доказательства корректности алгоритмов до структурной индукции в логике и сложных перечислительных задач в теории графов. Тот, кто разберётся с ними здесь и сейчас, позже с удивлением обнаружит, что самые трудные доказательства в старших разделах — это, по существу, лишь переодетый в другую форму шаг индукции или замаскированная биекция, с которыми он уже научился обращаться.

ГЛАВА 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1.1. Теоретический раздел

1.1.1. Принцип математической индукции

Индукцией называют переход от частных утверждений к общим. Напротив, переход от общих утверждений к частным называется дедукцией. Например, утверждение «число 342 делится на три» является частным утверждением. Из него можно сформулировать множество общих. Например, «если сумма цифр числа делится на три, то и само число делится на три» или «любое трехзначное число делится на три» и т.д. Таким образом, индукция позволяет получить множество общих утверждений на основе частных, зачастую основанных на известных фактах. А метод математической индукции как раз и предназначен для определения истинности этих утверждений. В приведенных примерах очевидно, что первое утверждение является истинным, а второе – ложным.

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции. Пусть имеется какое-то утверждение, зависящее от натурального n . Если это утверждение истинно при $n = 1$ и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n = k$ следует его справедливость и при следующем n , равном $k + 1$, то данное утверждение верно для всех натуральных n .

1.1.2. Метод математической индукции

Способ доказательства математических утверждений с помощью принципа математической индукции называется методом математической индукции, который состоит в следующем:

1. Проверяют истинность утверждения при $n = 1$ – первый шаг доказательства (первый индукционный шаг).
2. Допускают, что утверждение справедливо при $n = k$, где k – произвольное натуральное число ($k \in \mathbb{N}$), и доказывают, что тогда утверждение верно и при $n = k + 1$ – второй шаг доказательства (второй индукционный шаг).

Если обе части доказательства проведены, то на основании принципа математической индукции утверждение истинно для всех натуральных n ($n \in \mathbb{N}$) – вывод.

1.1.3. Проблема полной проверки

В математике часто встречаются утверждения, зависящие от натурального числа n :

$$P(n): 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Проверка для $n = 1, 2, 3$ показывает верность. Однако пример $P(n)$: « $n^2 + n + 41$ — простое число» оказывается истинным для $n = 1, \dots, 39$, но ложным при $n = 40$. Следовательно, конечное число проверок не гарантирует истинность для всех натуральных чисел. Требуется метод, позволяющий делать бесконечное заключение на основе конечного рассуждения.

1.1.4. Идея индукции.

Представим, что перед нами поставили задачу: проверить истинность некоторого утверждения $P(n)$ для всех натуральных чисел n , начиная с единицы и до бесконечности. Прямолинейный подход — последовательная проверка для $n=1$, затем для $n=2$, затем для $n=3$ и так далее — обречён на провал. Дело не в нехватке времени или вычислительных ресурсов; дело в принципиальной невозможности завершить бесконечный процесс конечным числом шагов. Сколько бы проверок мы ни провели, всегда останется бесконечное множество непроверенных значений.

Именно здесь и возникает необходимость в инструменте, который позволяет «перепрыгнуть» через бесконечность, — в принципе математической индукции. Его красота заключается в том, что он заменяет бесконечную последовательность индивидуальных проверок всего двумя логическими операциями. Овладеть этим методом — значит научиться доказывать бесконечное конечным.

Здесь следует сразу предупредить читателя об одном терминологическом капкане. Слово «индукция» в повседневном языке и в естественных науках обычно означает переход от частных наблюдений к общему выводу. «Я видел десять белых лебедей и заключаю: все лебеди белые.» - Это — эмпирическая индукция, она всегда подвержена риску опровержения (встретился одиннадцатый, чёрный лебедь — и теория рухнула). Математическая индукция, несмотря на название, не имеет с этим риском ничего общего. Это — строгое дедуктивное рассуждение. Если посылки верны, заключение истинно с абсолютной гарантией. Путать эти два понятия нельзя, и в дальнейшем мы будем помнить: математическая индукция — это дедуктивный метод, лишь по историческому недоразумению

носящий имя индукции.

Центральный образ, на который мы будем опираться, — это образ бесконечного ряда костяшек домино. Представьте, что утверждения

$P(1), P(2), P(3), \dots$ — это костяшки, расставленные на неограниченно длинной прямой. Истинность утверждения $P(k)$ мы отождествляем с падением костяшки номер k . Тогда весь механизм индукции сводится к двум условиям. Первое: мы должны физически толкнуть первую костяшку — убедиться, что $P(1)$ истинно. Второе: мы должны убедиться, что костяшки расставлены на таком расстоянии друг от друга, что падение любой из них неминуемо роняет следующую. Если эти два условия выполнены, мы можем больше ничего не делать — волна падения пробежит по всему ряду, и мы гарантированно знаем, что рано или поздно упадёт костяшка с любым заданным номером.

Этот образ полезен, но он же скрывает одну тонкость, которую нам придётся вскрыть. Домино падают во времени, одно за другим, и у неискущённого человека может возникнуть иллюзия, что индукция — это процесс, разворачивающийся шаг за шагом, от единицы к двойке, от двойки к тройке, уходящий в бесконечность. На самом деле мы никуда не «идём». Индукционный переход — это не описание динамического процесса, а статическое утверждение об импликации: ЕСЛИ $P(k)$ истинно, ТО $P(k+1)$ тоже истинно. Мы доказываем это одно-единственное утверждение для произвольного k , не совершая бесконечного обхода. Вся мощь метода — в этом «для произвольного». Один раз доказанный переход снимает необходимость бесконечного перебора.

Разобравшись с общей идеей, перейдём к точной формулировке.

1.1.5. Формулировка принципа математической индукции

Пусть $P(n)$ — некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n (под n мы пока понимаем числа $1, 2, 3, \dots$; возможность начинать отсчёт не с единицы мы обсудим позже). Принцип математической индукции утверждает следующее.

Если одновременно выполняются два условия:

1. База индукции. Утверждение $P(1)$ истинно.
2. Индукционный переход. Для любого натурального k из предположения об истинности $P(k)$ логически следует истинность $P(k+1)$

— то отсюда можно заключить, что утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных чисел n .

В символьной записи:

$$\left(P(1) \wedge \left(\forall k \in N \left(P(k) \Rightarrow P(k+1) \right) \right) \right) \Rightarrow (\forall n \in N P(n)).$$

На техническом жаргоне предположение об истинности $P(k)$ в процессе доказательства перехода называют индукционным предположением, а само доказываемое утверждение $P(k+1)$ — индукционным заключением.

Обратите внимание на тонкость, которую часто упускают при первом прочтении: во фразе «для любого натурального k » переменная k пробегает то же самое множество, что и n , но её роль в рассуждении принципиально иная. n — это «целевая» переменная, мы хотим установить истинность $P(n)$ для всех её значений. k же — это «переменная перехода», временное имя, которое мы даём произвольному элементу натурального ряда, чтобы доказать импликацию, связывающую два соседних утверждения. Доказав эту импликацию для произвольного k , мы автоматически получаем цепочку:

$$P(1) \Rightarrow P(2), P(2) \Rightarrow P(3), P(3) \Rightarrow P(4), \dots$$

вплоть до любого наперёд заданного номера. Теперь, зная из базы, что $P(1)$ истинно, мы можем «размотать» эту цепочку. Истинность $P(1)$ через первую импликацию даёт истинность $P(2)$. Истинность $P(2)$ через вторую импликацию даёт истинность $P(3)$, и так далее. Принципиально важно, что длина цепочки, которую мы способны размотать, не ограничена. Для любого конкретного числа N мы можем, потратив $N-1$ логических шагов, добраться до $P(N)$ и убедиться в его истинности. А поскольку N выбрано произвольно, истинность распространяется на всё множество.

Однако здесь необходимо сделать важнейшее методологическое отступление. Только что описанное «разматывание цепочки» — это не само доказательство по индукции, а объяснение того, почему принцип индукции работает. Само же доказательство по индукции состоит не в разматывании, а именно в установлении базы и перехода. Студент, который пытается «доказывать индукцией», последовательно проверяя $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, как раз и совершает подмену метода бесконечным (или очень длинным) перебором. Индукция, напомним, — это инструмент, позволяющий избежать перебора.

Аксиоматический статус и логическая неизбежность

Возникает законный вопрос: а почему мы вообще имеем право пользоваться этим принципом? Является ли он теоремой, которую можно доказать, или это нечто более фундаментальное?

Ответ таков: в стандартной аксиоматике натуральных чисел (аксиоматика Пеано) принцип математической индукции является одной из аксиом. Его нельзя вывести из более простых утверждений о натуральных числах, не попав при этом в логический круг. Более того, именно аксиома индукции отличает натуральный ряд от других упорядоченных множеств и придаёт ему ту самую счётную природу, которую мы интуитивно ощущаем.

Это означает, что когда мы доказываем что-то по индукции, мы опираемся на фундаментальное свойство натуральных чисел — свойство, без которого сама конструкция $\mathbb{N}$ потеряла бы определённую ясность. В этом смысле метод математической индукции не просто полезный технический приём; это логический каркас, на котором держится вся арифметика дискретного.

Читателю, глубоко интересующемуся основаниями математики, можно порекомендовать отдельно изучить аксиоматику Пеано. Для практических же целей данного пособия достаточно осознать: сомневаться в законности индукции как метода доказательства — значит сомневаться в самой природе натурального ряда. Поэтому мы принимаем этот принцип как данность и сосредотачиваемся на технике его применения.

Почему нельзя пропустить базу или переход

Оба условия — база и переход — являются необходимыми. Потеря любого из них обесценивает всё рассуждение.

Пропуск базы. Можно доказать индукционный переход для утверждения, которое ложно при всех n . Классический пример: $P(n)$ есть утверждение « $n > n+10$ ». Переход $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ доказывается тривиально: если $k > k+10$, то, прибавив по единице к обеим частям неравенства, получим $k+1 > k+11$, что и есть $P(k+1)$. Логически переход безупречен. Но базы нет — $P(1)$ ложно. И в результате никакого вывода об истинности $P(n)$ сделать нельзя. Переход без базы — это как расставленные костяшки, первую из которых никто не толкнул. Стоят, но не падают.

Пропуск перехода. Можно иметь истинную базу для утверждения, которое выполняется лишь для $n=1$ и больше нигде. Пусть $P(n)$ утверждает « $n=1$ ». База очевидна: $P(1)$ истинно. Но переход доказать невозможно, потому что из $k=1$ (для $k=1$) не следует $k+1=1$. Утверждение истинно только при $n=1$.

База без перехода — это как толкнуть первую костяшку в ряду, где костяшки расставлены на большом расстоянии друг от друга. Она упадёт, но вторая останется стоять, и волна не пойдёт.

Таким образом, только совместное выполнение двух условий — толчок первой костяшки и непрерывность цепочки падений — гарантирует прохождение волны по всему ряду.

Обобщение: когда база не единица

В формулировке принципа мы начали нумерацию с единицы, но это не единственная возможность. Часто утверждение $P(n)$ имеет смысл только начиная с некоторого числа n_0 , которое может быть больше единицы, или даже равняться нулю, если мы включаем ноль в натуральный ряд. Тогда принцип модифицируется очевидным образом:

База индукции. $P(n_0)$ истинно.

Индукционный переход. Для любого $k \geq n_0$ из $P(k)$ следует $P(k+1)$.

Заключение. $P(n)$ истинно для всех натуральных $n \geq n_0$.

Здесь важно согласование: переход должен доказываться именно для тех k , начиная с которых мы планируем распространять истинность. Если база установлена при $n=5$, а переход доказан для всех $k \geq 1$, это нормально. Но если база при $n=5$, а переход доказан только для $k \geq 10$, то утверждение «повиснет» для $n=6, 7, 8, 9$ — мы не сможем до них добраться.

Эта гибкость выбора стартовой точки чрезвычайно полезна. Многие содержательные утверждения дискретной математики — например, о свойствах графов с числом вершин не менее двух или о неравенствах, выполняющихся для достаточно больших показателей, — требуют базы не с единицы. Умение верно выбрать n_0 — один из первых навыков, который предлагается отработать читателю на практике.

1.1.6. Структура доказательства по индукции

Любое доказательство по индукции структурно распадается на три логических блока. Их часто называют «три шага», но слово «шаг» здесь неудачно, потому что оно провоцирует образ последовательного движения от первого ко второму, от второго к третьему. На самом деле база и индукционный переход — это два независимых доказательства, которые в сумме дают результат. Индукционное предположение — не отдельное действие, а временная гипотеза, принимаемая внутри перехода. Тем не менее, для удобства изложения мы будем придерживаться устоявшейся трёхчастной схемы, последовательно разбирая каждый элемент.

База индукции

База индукции — это та часть доказательства, с которой чаще всего хочется разделаться побыстрее, потому что она кажется тривиальной, а иногда и откровенно скучной. Между тем, пренебрежение базой — одна из самых частых причин краха всего доказательства. Мы уже видели в разделе 1.4, что без базы переход ничего не даёт. Теперь посмотрим на базу внимательнее: что именно мы обязаны сделать и как выбрать ту самую точку p_0 , с которой всё начинается.

Содержательная задача базы. Проверить непосредственно, без привлечения каких-либо индукционных соображений, что доказываемое утверждение $P(n)$ истинно при $n=p_0$. Здесь p_0 — это минимальное натуральное число, для которого утверждение формулируется как осмысленное и для которого мы планируем установить его истинность.

Как выбирается p_0 . Во многих учебных примерах $p_0=1$, и это создаёт опасную иллюзию универсальности. На самом деле выбор стартового номера диктуется исключительно содержанием задачи.

- Если утверждение касается суммы первых n натуральных чисел, база естественно берётся при $n=1$ (сумма одного слагаемого равна самому этому слагаемому).
- Если мы доказываем неравенство $2^n > n^2$, прямая проверка показывает, что при $n=1$ оно верно, при $n=2$ оно неверно, при $n=3$ неверно, $n=4$ неверно, а при $n=5$ становится верным. Здесь база должна быть установлена при $p_0=5$, иначе доказательство просто не получится запустить.

- Если утверждение касается графов с числом вершин не менее некоторого порога или свойств последовательностей, определённых начиная с нуля, n_0 может равняться нулю или, скажем, трём.

Главное правило: база должна покрывать тот минимальный случай, с которого утверждение действительно верно и с которого мы намерены распространять истинность дальше. Если вы сомневаетесь, перепроверьте ещё два-три значения после предполагаемого n_0 . Если утверждение «сбоит» уже на n_0+1 , значит, либо база выбрана не там, либо сам переход никогда не удастся доказать.

1.1.7. Чего нельзя делать при проверке базы.

Распространённая ошибка — пытаться доказывать базу индукционными же средствами. База первична. Она не опирается ни на какое индукционное предположение. Если для проверки $P(n_0)$ вам вдруг понадобилось предположить $P(n_0-1)$, вы совершили логическую ошибку. Исключение составляют лишь те ситуации, когда вы доказываете базу для нескольких первых значений, чтобы потом применить особую форму индукции (например, возвратную), но это уже тема продвинутого уровня.

1.1.8. Объём проверки.

Как правило, база — это одно-два предложения с простой подстановкой числа n_0 в формулировку утверждения и элементарным вычислением. Не нужно раздувать этот раздел: его задача — засвидетельствовать, что фундамент существует, а не украшать его архитектурными излишествами.

1.1.9. Индукционное предположение

Индукционное предположение — самый короткий и одновременно самый тонкий момент во всей конструкции. Внешне это выглядит как фраза: «Предположим, что утверждение $P(k)$ истинно для некоторого произвольного $k \geq n_0$ ». Казалось бы, что тут обсуждать? Однако именно вокруг этого предположения наматывается наибольшее количество недоразумений.

Что мы на самом деле делаем. Произнося фразу «предположим, что $P(k)$ верно», мы не утверждаем, что $P(k)$ действительно верно для какого-то конкретного числа. Мы временно, внутри данного блока рассуждений,

наделяем $P(k)$ статусом истинного высказывания. Это гипотеза, аналогичная той, что используется в любом доказательстве импликации: чтобы доказать «если A , то B », мы временно предполагаем A истинным и выводим B . Здесь роль A играет $P(k)$, роль B — $P(k+1)$.

- **Произвольность k .** Слово «произвольный» в формулировке индукционного предположения — не фигура речи, а жёсткое логическое требование. k — это не единица, не двойка, не какое-то конкретное число. Это переменная, о которой мы не знаем ничего, кроме того, что она не меньше n_0 . Если в процессе доказательства перехода вы вдруг используете какое-то дополнительное свойство, верное лишь для некоторых k (например, чётность, делимость на что-то, конкретное значение), то переход перестаёт быть справедливым для всех k , и всё доказательство рушится.
- **Границы действия предположения.** Индукционное предположение «живёт» только внутри доказательства индукционного шага. За его пределами оно не имеет силы. Нельзя, завершив доказательство перехода, продолжать ссылаться на истинность $P(k)$ как на установленный факт — фактом после полного завершения индукции станет лишь истинность $P(n)$ для всех n , а не для какого-то загадочного k .
- **Типичная ошибка: «подмена произвольности».** Студент пишет: «Предположим, что $P(k)$ верно для $k=5$ ». Это ошибка. Индукционное предположение делается не для конкретного числа, а для произвольного. Если вы зафиксировали k , вы лишили переход универсальности, и он больше никуда не «передаётся». Сравните: чтобы доказать, что все люди смертны, недостаточно проверить это только для Сократа.

1.1.10. Индукционный шаг (переход)

Индукционный шаг — это сердце доказательства. Здесь происходит основная мыслительная работа. В отличие от базы, которая часто сводится к арифметической подстановке, переход почти всегда требует изобретательности, алгебраической техники или комбинаторной догадки.

Исходный пункт. Мы стоим перед задачей: имея в руках истинное (по предположению) утверждение $P(k)$, доказать истинность утверждения $P(k+1)$. Формально: установить импликацию $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Содержательно: показать, как из справедливости доказываемого свойства для числа k логически и вычислительно вытекает его справедливость для следующего числа $k+1$.

С чего начинать. Чаще всего удобно начать с левой или правой части того равенства, неравенства или теоретико-множественного соотношения, которое фигурирует в $P(k+1)$, и попытаться «вытащить» из неё фрагмент, соответствующий $P(k)$. Классический пример — доказательство формулы суммы. Пусть $P(n)$ гласит: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда $P(k+1)$ — это утверждение о сумме до $k+1$. Мы записываем:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1).$$

Первые k слагаемых — это в точности левая часть $P(k)$. По индукционному предположению мы имеем право заменить эту сумму на $\frac{k(k+1)}{2}$. Дальше остаётся алгебраическое преобразование:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

что и составляет правую часть $P(k+1)$. Переход доказан.

Ключевой момент: использование индукционного предположения.

Обратите внимание: в какой-то момент доказательства перехода мы обязаны сослаться на индукционное предположение. Если вы провели все выкладки и ни разу не воспользовались тем, что $P(k)$ верно, то одно из двух: либо вы доказали $P(k+1)$ независимо от $P(k)$ (что означало бы отсутствие необходимости в индукции вообще), либо вы допустили логический разрыв и фактически ничего не доказали. Индукционный переход без использования индукционного предположения — это симптом того, что доказательство не является индукционным, как бы оно ни было оформлено внешне.

Техническая работа внутри шага.

Именно здесь разворачиваются все алгебраические, комбинаторные или геометрические преобразования. Разложение на множители, группировка

слагаемых, применение известных тождеств, замена переменных, оценка неравенств — арсенал средств зависит от предметной области задачи. Важно помнить: каждый шаг преобразований должен быть логически обоснован и не опираться на то, что мы ещё не доказали.

1.1.11. Распространённые ловушки индукционного шага.

- *Неверное направление рассуждения.* Иногда студент начинает с утверждения $P(k+1)$, которое нужно доказать, преобразует его и приходит к $P(k)$, которое верно по предположению. Формально это доказательство «снизу вверх» может быть ошибочным, если преобразования не были обратимыми. Правильный путь — идти от $P(k)$ (или от выражения, в которое $P(k)$ подставлено) к $P(k+1)$, а не наоборот. Исключение возможно только если каждое преобразование было равносильным, но для начинающего безопаснее держаться прямого пути.
- *«Доказательство по кругу».* В процессе доказательства перехода студент неявно предполагает то, что ещё только требуется доказать, — например, использует $P(k+1)$ как уже истинное для обоснования какого-то шага. Это грубая логическая ошибка, делающая всё построение бессмысленным.
- *Потеря связи с k .* Переход должен быть доказан для того же самого k , для которого сделано индукционное предположение. Нельзя предположить $P(k)$ для одного k , а доказать $P(m)$ для какого-то другого m , не связанного с k соотношением $m=k+1$.
- *Слишком слабое индукционное предположение.* Иногда $P(k)$ недостаточно, чтобы вывести $P(k+1)$. В таких случаях может потребоваться усиленная форма индукции — предположение об истинности всех предыдущих утверждений. Эту технику мы разберём позже в разделе о возвратной индукции.

1.1.12. Завершение индукционного шага.

Как только цепочка преобразований привела нас к выражению, в точности совпадающему с формулировкой $P(k+1)$, мы ставим точку. Индукционный переход доказан. После этого, соединив его с установленной ранее базой, мы получаем право заключить, что $P(n)$ истинно для всех $n \geq n_0$.

Собираем всё вместе: итоговое заключение

Каждое доказательство методом математической индукции состоит из трёх чётко выделяемых частей:

- **База** - проверка $P(n_0)$.
- **Индукционное предположение** - предположение, что $P(k)$ верно для произвольного $k \geq n_0$.
- **Индукционный шаг** - вывод $P(k + 1)$ с использованием предположения.

1.1.13. Классический пример: сумма арифметической прогрессии

Утверждение. Для любого натурального n :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Доказательство.

База ($n = 1$).

Левая часть: 1. Правая часть: $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ Равенство выполнено.

Индукционное предположение.

Пусть для некоторого $k \geq 1$ верно:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Индукционный шаг ($k \rightarrow k + 1$).

Рассмотрим сумму первых $k + 1$ чисел:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1)$$

По предположению, сумма в скобках равна $\frac{k(k+1)}{2}$. Тогда:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k + 1) \cdot \frac{k + 2}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Полученное выражение совпадает с правой частью исходной формулы при $n = k + 1$.

Таким образом, из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k + 1)$.

Вместе с базой это доказывает утверждение для всех $n \in \mathbb{N}$. ■

1.1.14. Пример с неравенством

Утверждение. $2^n > n$ для всех $n \geq 1$.

База ($n = 1$): $2^1 = 2 > 1$ — верно.

Индукционное предположение: $2^k > k$.

Шаг: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k$ (по предположению).

Для любого $k \geq 1$ выполняется $2k \geq k + 1$. Следовательно, $2^{k+1} > k + 1$.

Утверждение доказано. ■

1.1.15. Типичные ошибки

При использовании метода математической индукции следует избегать следующих логических погрешностей:

Ошибка	Пояснение
Проверка нескольких начальных значений вместо базы и шага	Это не доказательство, а лишь эмпирическая проверка.
В индукционном шаге не используется индукционное предположение	Если $P(k + 1)$ выводится без $P(k)$, то индукция не нужна; кроме того, это может маскировать ложное утверждение.
Отсутствие базы индукции	Без базы можно «доказать» заведомо неверное утверждение, например, $n = n + 1$ (шаг формально выполним, но база неверна).
Неверный переход при малых k	Например, в «доказательстве» того, что все лошади одной масти, шаг работает для $k \geq 2$, но база $n = 1$ не позволяет перейти от $k = 1$ к $k = 2$.

Замечание 1. При численных подтверждениях общего правила вовсе не обязательно стартовать с $n = 1$. Достаточно убедиться, что утверждение верно при некотором начальном значении m (например, $m = 3, 5, 7$ или любом другом натуральном числе). Затем делается допущение: пусть правило выполняется для произвольного номера k , который строго больше m ($k > m$). Если из этого предположения удаётся вывести справедливость утверждения для следующего номера $k + 1$, то методом математической индукции доказывается истинность исходного утверждения для всех натуральных n , начиная с m . Такой подход избавляет от необходимости

проверять $n = 1$, позволяя гибко выбирать стартовую базу.

Замечание 2. Если числовая последовательность задаётся рекуррентно — то есть каждый её член выражается через один или два предыдущих, — то привычная схема математической индукции трансформируется. Здесь уже недостаточно одной начальной проверки: базу индукции закладывают сразу для двух первых номеров, например для $n = 1$ и $n = 2$. Далее предполагают, что доказываемое утверждение верно для двух произвольных последовательных номеров $n = k$ и $n = k + 1$ (это и есть индукционное предположение). Затем, опираясь на это предположение, доказывают справедливость утверждения для следующего номера $n = k + 2$. Такой шаг индукции в точности повторяет логику рекуррентного перехода: зная два предыдущих члена, получаем последующий. В итоге утверждение оказывается доказанным для всех натуральных номеров, начиная с единицы.

1.1.16. Обобщения метода

Индукция с произвольным началом

Если утверждение доказывается для $n = n_0$, а шаг — для всех $k \geq n_0$, то оно верно для всех $n \geq n_0$.

1.1.17. Сильная (полная) индукция

В индукционном шаге разрешается предполагать истинность $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$ для вывода $P(k + 1)$. Это удобно при работе с рекуррентными последовательностями (например, числа Фибоначчи).

1.1.18. Заключение

Математическая индукция — это не эмпирическая догадка, а дедуктивная машина. Мы начали с того, что развели два значения слова «индукция». И сейчас, после десятков разобранных примеров, это различие должно ощущаться не как заученное определение, а как внутренний рефлекс. Математическая индукция никогда не «угадывает» закономерность. Она не подсказывает, чему равна сумма кубов или как выглядит явная формула рекуррентной последовательности. Её задача скромнее и одновременно фундаментальнее: если гипотеза уже сформулирована, метод даёт абсолютную, дедуктивную гарантию её истинности для всех натуральных чисел. От конечного числа проверок — к бесконечному выводу. В этом и заключён интеллектуальный скачок, ради которого метод был формализован. Говоря формализовано: Математическая индукция — это дедуктивный метод доказательства утверждений, параметризованных натуральным числом. Он не служит для открытия формул, но является надёжным инструментом их проверки. Освоение метода требует чёткого разделения базы, предположения и шага, и внимательного отношения к логическим связкам между k и $k+1$.

Три части не равны по своей логической нагрузке.

Перечитывая собственные доказательства, полезно всякий раз задавать три контрольных вопроса. База: действительно ли я проверил минимальный случай, и верен ли он без каких-либо скрытых допущений? Индукционное предположение: точно ли моё k произвольно, а не зафиксировано неявно на удобном значении? Индукционный шаг: в какой именно строчке я использовал индукционное предположение, и не подменил ли я его на ходу чем-то другим? Доказательство, которое проходит этот тройной фильтр, перестаёт быть «студенческой отпиской» и становится корректным математическим текстом.

Связка между k и $k+1$ — это логический мост, а не ритуальная формула. Наверное, самый важный навык, который мы стремились выработать, — это умение видеть в индукционном переходе не цепочку алгебраических манёвров, а именно мост от известного к неизвестному. Когда мы пишем «подставим индукционное предположение», мы физически соединяем мир уже установленных фактов с миром ещё не доказанных утверждений. Если в этом месте конструкция держится на честном слове — например, на неосторожном делении на ноль, на необоснованной оценке или на скрытом допущении $P(k+1)$ внутри доказательства $P(k+1)$ — мост обрушивается. Именно поэтому мы так подробно разбирали софизмы: они учат диагностировать трещины в мосту до того, как по нему пройдёт кто-то ещё.

Индукция не заканчивается на натуральных числах. Хотя пособие было сосредоточено на классической индукции по натуральному параметру, мы несколько раз намекали на то, что область применения метода значительно шире. Структурная индукция в теории графов и деревьев, возвратная индукция, индукция по длине формулы в логике, по числу элементов в множестве — всё это вариации одной и той же идеи. Тот, кто действительно понял связку «база — предположение — шаг» для натурального ряда, без труда перенесёт эту схему на любой другой счётный или рекурсивно определённый объект. В этом смысле математическая индукция — это не локальный приём первого семестра, а сквозная логическая компетенция, сопровождающая математика на протяжении всей профессиональной жизни.

1.1.19. Упражнения для самопроверки

1. Докажите по индукции: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 3 при всех $n \geq 1$.
3. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Утверждение: «В любом конечном множестве чисел все числа равны».
«Доказательство»: База для 1 числа — тривиальна. Шаг: если в любом k -элементном множестве все числа равны, то возьмём $k + 1$ число, уберём одно — получим k равных, уберём другое — снова k равных, значит, все $k + 1$ равны.

1.2. Практический раздел

1.2.1. Задачи на доказательство кратности и делимости

Задача 1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in N_0$.

Задача 2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .
 $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n$, $b = 6$.

Задача 3. Докажите методом математической индукции: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

Задача 4. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа истинно следующее утверждение:
 $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11.

1.2.2. Задачи на доказательство равенств и неравенств

Задача 5. Доказать равенство:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Задача 6. Доказать методом математической индукции:

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = \frac{(2p+n)(n+1)}{2}$$

Задача 7. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad (n > 1)$$

Задача 8. Доказать утверждение методом математической индукции:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad (n \geq 2)$$

Задача 9. Доказать неравенство:

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot [(n+1)!]^n, \quad (n > 2)$$

Задача 10. Докажите методом математической индукции неравенство Бернулли:

$$(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n, \quad \text{для всех } n \in N \text{ и } a > -1, a \in R$$

1.2.3. Задачи на вычисление сумм

Задача 11. Доказать методом математической индукции:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \left(\frac{n(4n^2 - 1)}{3} \right)$$

Задача 12. Найдите сумму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2025 \cdot 2025! + 2026 \cdot 2026!$$

Задача 13. Доказать методом математической индукции леммы.

Лемма 1. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть последовательность бесконечно малая.

1.2.4. Примеры решения задач на доказательство делимости методом математической индукции

Задача 1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in N_0$.

Доказательство.

Используем метод математической индукции.

Проверим для $n = 0 : 5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16$ делится на 16,
для $n = 1 : 5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 16$ делится на 16,
для $n = 2 : 5^2 - 4 \cdot 2 + 15 = 32$ делится на 16.

Допустим, что утверждение верно при $n = k$, то есть $5^k - 4k + 15$ делится на 16. Для $n = k + 1$ выражение $5^n - 4n + 15$ примет вид:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 4(k+1) + 15 &= 5 \cdot 5^k - 4k + 11 = 5 \cdot 5^k - 4k + 4 + 15 = 5 \cdot \\ 5^k - 4k + 11 &= 5(5^k - 4k + 15) - 4k + 11 = 5 \cdot 5^k - 4k \cdot 5 + 15 \cdot 5 - 4k + \\ 11 + 20k - 75 &= 5(5^k - 4k + 15) + (16k - 64) = 5(5^k - 4k + 15) + \\ 16(k - 4) \end{aligned}$$

Так как $5^k - 4k + 15$ делится на 16, то $5(5^k - 4k + 15)$ делится на 16, то $5(5^k - 4k + 15) + 16(k - 4)$ делится на 16. Итак, если $5^k - 4k + 15$ делится на 16, то и $5^{k+1} - 4(k+1) + 15$ делится на 16.

Утверждение верно для $k = 0, 1, 2$. Если утверждение верно для $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$. Тогда утверждение верно для любого целого неотрицательного n , что и требовалось доказать

Замечание. Чтобы выделить выражение $5^k - 4k + 15$ (которое по предположению индукции делится на 16), используем искусственное добавление и вычитание одинаковых членов, т.е. добавляем и вычитаем $20k$

и 75. (в уравнении это выглядит как: $5 \left(5^k \underbrace{-4k + 15}_{\text{здесь добавили}} \right) - 4k +$
 $\underbrace{11 + 20k - 75}_{\text{здесь убрали}}$)

Задача 2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .

$$a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \quad b = 6.$$

Доказательство.

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 1$ (наименьшее натуральное число). Тогда:

$$a_n = a_1 = 2 + 3 + 7 = 12.$$

Поскольку число 12 делится на 6, то при $n = 1$ исходное утверждение является верным (число a_1 делится на $b = 6$).

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 1$) исходное утверждение верно, то есть, число $a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$ делится на 6.

Покажем, что в этом случае утверждение верно и для числа $k + 1$:
1: Выражение $a_{k+1} = 2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 7(k + 1)$.

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 7(k + 1) = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + 7(k + 1) = \\ &= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 = (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6k^2 + 6k + 6k + 12 = \\ &= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6(k^2 + k + k + 2). \end{aligned}$$

Поскольку $a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$ делится на 6 и выражение $6(k^2 + k + k + 2)$ делится на 6, то выражение $a_{k+1} = 2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 7(k + 1)$ также делится на число $b = 6$. Значит, исходное утверждение выполняется для любого натурального числа n . Что и требовалось доказать.

**1.2.5. Примеры решения задач на доказательство кратности
методом математической индукции**

Задача 3. Докажите методом математической индукции:

$4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

Доказательство:

Докажем: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

При $n = 1$ выражение $4^{2n-1} + 1$ имеет вид:

$$4^{2n-1} + 1 = 4 + 1 = 5$$

кратно 5, то есть базис индукции выполняется.

Установим справедливость индукционного шага.

Предположим, что

$4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

Пусть $4^{2n-1} + 1 = 5k, k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Покажем, что $4^{2(n+1)-1} + 1$ кратно 5:

$$\begin{aligned} 4^{2(n+1)-1} + 1 &= 4^{2n+2-1} + 1 = 4^2 \cdot 4^{2n-1} + 1 = 16 \cdot 4^{2n-1} + 1 = \\ &= (15 + 1) \cdot 4^{2n-1} + 1 = 15 \cdot 4^{2n-1} + 4^{2n-1} + 1 = 15 \cdot 4^{2n-1} + 5k = (5 \cdot 3) \cdot \\ &4^{2n-1} + 5k = 5(3 \cdot 4^{2n-1} + k) - \text{кратно } 5. \end{aligned}$$

На основании принципа математической индукции заключаем, что $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

Задача 4. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа n истинно следующее утверждение:

$$6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} \text{ кратно } 11.$$

$$(\text{формализованная запись } 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} = 11m, m \in \mathbb{Z})$$

Доказательство.

База индукции. Положим $n = 1$, получаем $6^0 + 3^2 + 3^0 = 1 + 9 + 1 = 11$, это число кратно 11. Верно.

Предположение индукции. Полагаем, что утверждение верно для $n = k$, то есть $6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1}$ кратно 11.

Индукционный переход. Покажем, что утверждение верно для $n = k+1$, то есть $6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1}$ кратно 11.

Способ 1. Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} &= 6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 3^{2k} \cdot 2^{2k} + 3^{k+2} + 3^k \\ &= 3(3^{2k-1} \cdot 2^{2k} + 3^{k+1} + 3^{k-1}) = 3(2^2 \cdot 3 \cdot 2^{2k-2} \cdot 3^{2k-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) = \\ &= 3(12 \cdot 2^{2k-2} \cdot 3^{2k-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) = 3(11 \cdot 2^{2k-2} \cdot 3^{2k-2} + 2^{2k-2} \cdot 3^{2k-2} + \\ &+ 3^{n+1} + 3^{n-1}) = 3(11 \cdot 6^{2k-2} + 6^{2k-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

В данном выражении первое слагаемое делится на 11 (так как содержит множитель 11), а второе по предположению индукции.

Способ 2. Выделим выражение из индукционного предположения:

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} &= 6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 6^2 \cdot 6^{2k-2} + 3^2 \cdot 3^k + \\ &+ 3 \cdot 3^{k-1} = 36 \cdot 6^{2k-2} + 9 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} = 33 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot (6^{2k-2} + \\ &+ 3^{k+1} + 3^{k-1}) \end{aligned}$$

По предположению индукции $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} = 11m$ получим: $33 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 11m = 11(3 \cdot 6^{2k-2} + 3m)$ – делится на 11.

Таким образом, все это выражение кратно 11, что и требовалось доказать.

1.2.6. Примеры решения задач на доказательство равенств и неравенств методом математической индукции

Задача 5. Доказать равенство: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Решение.

Решим по принципу математической индукции.

1) $n = 1 : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

При $n = 1$ формула верна.

2) Допустим, формула верна для $n = k$, то есть:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Покажем, что тогда формула верна и для $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\ \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Итак, если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$, таким образом, формула верна для любого n , что и требовалось доказать.

Задача 6. Доказать методом математической индукции:

$$p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + n) = \frac{(2p + n)(n + 1)}{2}$$

Доказательство

Проверим при $n = 1$:

$$p + (p + 1) = \frac{(2p + 1)(1 + 1)}{2}; \quad 2p + 1 = 2p + 1$$

Проверим при $n = 2$:

$$p + (p + 1) + (p + 2) = \frac{(2p + 2)(2 + 1)}{2}; \quad 3p + 3 = 3(p + 1)$$

Теперь предположим, что равенство верно для $n = k$, то есть выполняется

$$p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + k) = \frac{(2p + k)(k + 1)}{2}$$

Докажем, что тогда равенство выполняется и для $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + k) + (p + k + 1) &= \frac{(2p + k)(k + 1)}{2} + \\ (p + k + 1) &= \frac{(2p + k)(k + 1) + (2p + 2k + 2)}{2} = \frac{2pk + k^2 + 4p + 3k + 2}{2} = \\ \frac{(2pk + k) + (4p + 2) + (k^2 + 2k)}{2} &= \frac{k(2p + 1) + 2(2p + 1) + k(k + 2)}{2} = \frac{(k + 2) + (2p + 1) + k(k + 2)}{2} = \\ \frac{(k + 2)(2p + k + 1)}{2} \end{aligned}$$

Итак, если равенство выполняется для $n = k$, то оно выполняется и для $n = k + 1$, и, так как оно выполняется для $n = 1$, $n = 2$, по индукции оно выполняется для любого n .

Задача 7. Доказать методом математической индукции:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad (n > 1).$$

Доказательство

Пусть $n = 2$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}, \quad \frac{7}{12} > \frac{13}{25}, \quad \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 2$) исходное неравенство выполняется, то есть, $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

Покажем, что в этом случае неравенство выполняется и для числа $k + 1$. То есть, докажем неравенство: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$

Оценим левую часть неравенства, учитывая, что $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \\ \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} \right) &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2k+1)(k+1)} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \\ \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} \right) &= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k}}_{> \frac{13}{24}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{(2k+1)(k+1)}}_{> 0} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$ выполнено. Значит, исходное неравенство имеет место для любого натурального числа n , не равного 1.

Задача 8. Доказать утверждение методом математической индукции:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, (n \geq 2)$$

Доказательство

База индукции: при $n = 2$ получаем $\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

Пусть утверждение верно для $k = n$, покажем, что оно верно для $k = k + 1$:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \\ &\frac{1}{2k} \left(\frac{k^2+2k+1-1}{k+1}\right) = \frac{1}{2k} \left(\frac{k^2+2k}{k+1}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)} \end{aligned}$$

Значит,

утверждение

доказано.

Задача 9. Доказать неравенство:

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot [(n+1)!]^n, (n > 2)$$

Доказательство.

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 2$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$2! \cdot 4! > [3!]^2$$

$$2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [3 \cdot 2 \cdot 1]^2$$

$$48 > 36$$

Как мы видим, при $n = 2$ исходное неравенство выполняется.

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 2$) исходное неравенство является верным, то есть,

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! > [(k+1)!]^k, (k > 2)$$

Покажем, что в этом случае неравенство выполняется и для числа $k + 1$. То есть, докажем неравенство

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > [(k+2)!]^{k+1}$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$[(k+2)(k+1)!]^{k+1} = (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^{k+1}$$

$$= (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^k (k+1)!$$

Неравенство, которое требуется доказать, примет вид:

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^k (k+1)!$$

Поскольку $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! > [(k+1)!]^k$, то задача сводится к доказательству неравенства:

$$(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}(k+1)!$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства:

$$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)2k(2k-1) \cdot \dots \cdot (k+2)(k+1)!$$

Поскольку выражение $(2k+2)(2k+1)2k(2k-1) \cdot \dots \cdot (k+2)$

содержит $k + 1$ множителей, наименьший из которых равен $k + 2$, то

$$(2k + 2)(2k + 1)2k(2k - 1) \cdot \dots \cdot (k + 2) > (k + 2)^{k+1}$$

Отсюда следует, что

$$(2k + 2)(2k + 1)2k(2k - 1) \cdot \dots \cdot (k + 2)(k + 1)! > (k + 2)^{k+1}(k + 1)!,$$

или

$$(2k + 2)! > (k + 2)^{k+1}(k + 1)!$$

Таким образом, неравенство $(2k + 2)! > (k + 2)^{k+1}(k + 1)!$, а следовательно и неравенство

$$2! 4! \dots (2k)! (2(k + 1))! > (k + 2)^{k+1}[(k + 1)!]^k(k + 1)!$$

выполнено. Значит исходное неравенство $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot [(n + 1)!]^n$ имеет место для любого натурального числа n , не равного 1. Что и требовалось доказать.

Задача 10. Докажите методом математической индукции неравенство Бернулли:

$$(1 + a)^n \geq 1 + a \cdot n, \text{ для всех } n \in N \text{ и } a > -1, a \in R$$

Доказательство:

Докажем справедливость неравенства Бернулли: $(1 + a)^n \geq 1 + a \cdot n$, для всех $n \in N$ и $a > -1, a \in R$

При $n = 0$ неравенство Бернулли имеет вид $(1 + a)^0 \geq a \cdot 0$ – верно, то есть базис индукции выполняется.

Установим справедливость индукционного шага. Предположим, что

$$(1 + a)^k \geq 1 + a \cdot k \quad (1)$$

Покажем, что

$$(1 + a)^k \geq 1 + a \cdot (k + 1) \quad (2)$$

Умножим обе части неравенства (1) на положительное число $(1 + a)$. Тогда $(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geq (1 + a \cdot k)(1 + a)$, то есть

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + a + a \cdot k + a^2 \cdot k \quad (3)$$

Поскольку $a^2 \geq 0$, имеем

$$1 + a + a \cdot k + a^2 \geq 1 + a + a \cdot k = 1 + a(k + 1) \quad (4)$$

Из неравенства (3) и (4) получаем неравенство (2). На основании принципа математической индукции заключаем, что

$$(1 + a)^n \geq 1 + a \cdot n, \text{ для всех } n \in N$$

Что и требовалось доказать.

Задача 11. Доказать методом математической индукции:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \left(\frac{n(4n^2 - 1)}{3} \right)$$

Доказательство:

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $n = 1$. Тогда исходное равенство примет вид:

$$1^2 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3} \Rightarrow 1 = 1$$

Очевидно, что при $n = 1$ исходное равенство является верным.

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 1$) исходное равенство выполняется, то есть, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k - 1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$

Покажем, что в этом случае равенство выполняется и для числа $k + 1$. То есть, докажем равенство:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(4(k + 1)^2 - 1)}{3}$$

Преобразуем левую часть равенства, учитывая, что

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k - 1)^2 = \left(\frac{k(4k^2 - 1)}{3} \right)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 &= \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + (2k + 1)^2 = \\ \frac{k(4k^2 - 1) + 3(2k + 1)^2}{3} &= \frac{4k^3 - k + 3(4k^2 + 4k + 1)}{3} = \frac{4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3}{3} = \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3} = \\ \frac{4k^3 + 4k^2 + 8k^2 + 8k + 3k + 3}{3} &= \frac{4k^2(k + 1) + 8k(k + 1) + 3(k + 1)}{3} = \frac{(k + 1)(4k^2 + 8k + 3)}{3} = \\ \frac{(k + 1)(4(k^2 + 2k + 1) - 1)}{3} &= \frac{(k + 1)(4(k + 1)^2 - 1)}{3} \end{aligned}$$

Таким образом, равенство

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(4(k + 1)^2 - 1)}{3}$$

выполнено. Значит, исходное равенство имеет место для любого натурального числа n .

Что и требовалось доказать.

**1.2.7. Примеры решения задач на нахождение суммы
методом математической индукции**

Задача 12. Найдите сумму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2025 \cdot 2025! + 2026 \cdot 2026!$$

Решение. Покажем, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

Докажем неравенство методом математической индукции:

База индукции $n = 1$: получаем $1 \cdot 1! = (1 + 1)! \Rightarrow 1 = 1 - \text{верно}$

Пусть утверждение верно для $k = n$, покажем, что оно верно для $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k + 1)(k + 1)! &= [1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot \\ n!] + (n + 1)(n + 1)! &= (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! = (n + 1)!(1 + n + \\ 1) - 1 &= (n + 1)!(n + 2) - 1 = (n + 2)! - 1 \end{aligned}$$

Значит, утверждение $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ является верным;

Следовательно,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2025 \cdot 2025! + 2026 \cdot 2026! = 2027! - 1$$

Ответ: $2027! - 1$

1.2.8. Примеры решения задач на доказательство некоторых утверждений из курса «Математический анализ»

Задача 13. Доказать методом математической индукции леммы.

Лемма 1. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство

Лемма 1. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Прежде чем доказывать сформулированную выше лемму, введем ряд определений, утверждений и теорем, на которые мы будем ссылаться и которые будем упоминать в ходе доказательства.

Определение 1: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел, в противном случае она называется расходящейся.

Определение 2: последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Определение 3: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists M > 0: \forall n \in N$ выполняется, что $|x_n| \leq M$.

Лемма 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть последовательность бесконечно малая

Теорема 1. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству задачи 13 (лемма 1).

Доказательство

1. *База индукции.* Проверим справедливость Леммы 1 на примере произведения двух бесконечно малых последовательностей.

Пусть $\{a_{n1}\}$ и $\{a_{n2}\}$ есть бесконечно малые последовательности. Рассмотрим их произведение $a_{n1} \cdot a_{n2}$. Последовательность a_{n2} является сходящейся по Определению 1, тогда по Теореме 1 она ограничена. Следовательно, по Лемме 2 произведение является последовательностью бесконечно малой. Утверждение верно.

2. *Предположение индукции.* Пусть Лемма 1 выполнена для натурального $n = k$, т.е. справедливо: $a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nk}$ является бесконечно

малой последовательностью. Обозначим ее $\{\beta_k\}$.

3. *Шаг индукции.* Докажем, что Лемма 1 будет верна для натурального номера $n = k + 1$. Таким образом, нужно показать, что $a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nk} \cdot a_{n(k+1)}$ является бесконечно малой последовательностью.

Действительно, $a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nk} \cdot a_{n(k+1)} =$
|по предположению индукции| $= \beta_k \cdot a_{n(k+1)}$.

Последовательность $\{a_{n(k+1)}\}$ является бесконечно малой. Следовательно, по Определению 1 она сходится. Тогда по Теореме 1 она ограничена. Следовательно, по Лемме 2 произведение $\beta_k \cdot a_{n(k+1)}$ является бесконечно малой последовательностью. А это нам и нужно было показать, т.е. Лемма 1 и Лемма 2 доказаны.

1.2.9. Задачи для самостоятельного решения

1. Методом математической индукции доказать, что при $n \in \mathbb{N}$ (1-12)

- 1) $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ кратно 6
- 2) $7^{2n} - 1$ кратно 24
- 3) $15^n + 6$ кратно 7
- 4) $9^n + 3$ кратно 4
- 5) $7^n + 12n + 17$ кратно 18
- 6) Доказать, что $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ кратно 11.
- 7) Доказать, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.
- 8) Доказать, что $4^n + 15n - 1$ кратно 9.
- 9) Доказать, что $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ делится на 3.
- 10) Доказать, что $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7.
- 11) Доказать, что $10^n + 18n - 28$ кратно 27.
- 12) Доказать, что $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ кратно 19.

2. Методом математической индукции доказать неравенство (13-23)

- 13) $2^n > 5n + 1$, если $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$
- 14) $3^{n-1} > 2n^2 - n$, если $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$
- 15) $2^n \geq n + 1$, если $n \in \mathbb{N}$
- 16) $(1 + h)^n > 1 + n \cdot h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2, n \geq 3, h > 0$.
- 17) $2^n > n^2, n \geq 5$.
- 18) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}, n > 1$.
- 19) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}, n > 1$.
- 20) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, n > 1$.
- 21) $n! > 2^n, n > 3$.
- 22) $4^n > n^2$.
- 23) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$.

3. Методом математической индукции доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство (24-35)

$$24) \quad \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

$$25) \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$26) \quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \dots + (n+1)(3n-1) = \frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$$

$$27) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$28) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n-1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

$$29) \quad \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

$$30) \quad \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{4n(4n+4)} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16(n+1)}.$$

$$31) \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

$$32) \quad \left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

$$33) \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

$$34) \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

$$35) \quad 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{(n(4n^2-1))}{3}.$$

4. Методом математической индукции доказать формулу Лейбница $(U \cdot V)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k U^k V^{n-k}$, где U^k, V^k – производные n -го порядка функций U и V .

ГЛАВА 2. ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ: ПРАВИЛА И ПРИНЦИПЫ

2.1. Теоретический раздел

Комбинаторика начинается не с формул. Она начинается с ситуации, в которой прямого ответа нет, а интуиция молчит или, что хуже, обманывает. Первая задача этой главы — приучить студента не хвататься за готовый шаблон, а останавливаться и задавать два вопроса: «Из каких независимых выборов состоит процесс?» и «Как связаны между собой возможные исходы: они исключают друг друга или могут сосуществовать?». Всё здание комбинаторного счёта стоит на двух опорах — правиле суммы и правиле произведения. Они кажутся тривиальными ровно до того момента, пока не встречается задача, где неправильный выбор между «и» и «или» приводит к ответу, отличающемуся в разы. Поэтому мы не просто сформулируем правила, а разберём, как их распознавать в условии, как комбинировать друг с другом и, главное, как замечать момент, когда наивное применение правила произведения начинает учитывать несуществующие варианты.

2.1.1. Основные правила комбинаторики (Сумма, Произведение)

Правило суммы формализует простейшую ситуацию выбора из несовместных альтернатив. Если объект можно выбрать m способами из первой категории и n способами из второй, причём ни один способ из первой категории не совпадает ни с одним из второй, то общее число способов выбрать объект из объединённого набора равно $m + n$. За этим стоит требование, которое часто проговаривают скороговоркой: множества не должны пересекаться. Но практическая трудность заключается не в проверке пустоты пересечения — она в том, что студент может неосознанно создать искусственное пересечение там, где его нет, или, наоборот, не заметить дублирования в своих рассуждениях.

Классическая иллюстрация правила суммы — выбор конверта из двух пачек разного цвета или выбор книги с полки, где часть книг на русском, а часть на английском. Здесь пересечения нет по определению: одна и та же книга не может быть одновременно в обеих стопках. Но стоит перейти к чуть более абстрактной задаче, например, подсчёту чисел с определёнными свойствами, как вопрос о пересечении потребует явной проверки. Работая с правилом суммы, полезно выработать привычку каждый раз спрашивать: «Может ли один и тот же конкретный исход быть получен двумя разными

путями в моём рассуждении?» Если ответ «да» — правило суммы в чистом виде применять нельзя, и на сцену выходит формула включений и исключений, о которой речь пойдёт позже.

Правило произведения — вторая опора. Оно описывает ситуацию составного действия, которое раскладывается в цепочку независимых шагов. Если первый шаг можно сделать m способами и при любом его исходе второй шаг можно сделать n способами, то вся последовательность выполняется $m \times n$ способами. Ключевое слово здесь — «независимых», и именно оно требует наибольшего внимания. Независимость понимается не в теоретико-вероятностном смысле, а как фиксированность числа продолжений: на втором шаге у вас всегда n вариантов, вне зависимости от того, какой конкретный вариант был выбран на первом. Если же число вариантов на втором шаге меняется в зависимости от выбора на первом — правило произведения всё ещё работает, но требует разбиения на случаи, которые потом нужно будет аккуратно сложить по правилу суммы.

Типичная ловушка, в которую попадают почти все начинающие, — применение правила произведения к задачам, где шаги не являются независимыми в указанном смысле, или, что ещё коварнее, подсчёт одного и того же итогового объекта несколько раз из-за разного порядка действий. Представьте, что вы формируете команду из трёх человек, выбирая первого, потом второго, потом третьего. Правило произведения даст вам $10 \times 9 \times 8$, и это будет верно, если в задаче важен порядок выбора — скажем, вы назначаете капитана, его заместителя и секретаря. Но если команда — это просто множество из трёх человек без внутренней иерархии, то правило произведения учтёт каждую тройку ровно $3!$ раз, поскольку одну и ту же тройку можно «собрать» шестью разными последовательностями выборов. Здесь и возникает потребность в переходе от размещений к сочетаниям — теме, которой будет посвящена следующая глава.

Отдельно стоит сказать о комбинировании правил. В реальных задачах правило суммы и правило произведения почти никогда не работают изолированно. Типична ситуация, когда процесс сначала разбивается на несколько взаимоисключающих случаев (правило суммы), а внутри каждого случая уже выстраивается цепочка шагов (правило произведения). Или наоборот: сначала конструируется объект по шагам, а затем полученные результаты суммируются по какому-то параметру. Навык правильного комбинирования — это не столько математическая техника, сколько умение

грамотно строить древовидную структуру рассуждения. Мы рекомендуем студентам на первых порах рисовать дерево решений явно: от корня отходят ветви первого выбора, от каждой из них — ветви второго, и так далее. Суммирование числа листьев на таком дереве и даёт итоговый ответ, причём сама визуализация часто подсвечивает ошибки, невидимые в алгебраической записи.

2.1.2. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле — пожалуй, самый обманчиво простой инструмент во всей дискретной математике. Его формулировка уместается в одну фразу: «Если в n ящиках сидит более n кроликов, то хотя бы в одном ящике сидит не менее двух кроликов». За этой детской считалкой скрывается метод доказательства существования, который не предъявляет искомый объект явно, а лишь гарантирует, что он обязан существовать. В этом и состоит его интеллектуальная трудность: мы привыкли, что доказать — значит построить или вычислить. Принцип Дирихле же действует от противного и опирается на чисто мощностные соображения.

Формально принцип Дирихле эквивалентен утверждению: если задано отображение из конечного множества A в конечное множество B , и мощность A строго больше мощности B , то это отображение не может быть инъективным. Иными словами, найдутся два различных элемента A , переходящие в один и тот же элемент B . Именно эта формулировка на языке функций и прообразов открывает путь к применению принципа в задачах, где никаких «кроликов» и «ящиков» на первый взгляд нет.

Главная сложность для студента — не понять принцип, а научиться конструировать ящики. В задаче о том, что в любой группе из 13 человек найдутся двое, родившиеся в один месяц, ящики очевидны: 12 месяцев. Но как только условие абстрагируется, построение ящиков превращается в содержательный творческий акт. Рассмотрим задачу: доказать, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5. Здесь ящиками становятся остатки от деления на 5 — их ровно пять штук. Шесть чисел дают шесть остатков, и принцип Дирихле гарантирует, что найдутся два числа с одинаковым остатком, а их разность автоматически кратна пяти. Красота решения — в его бесконструктивности: мы не знаем, какие именно это числа и какой у них остаток, но точно знаем, что пара существует.

Обобщённый принцип Дирихле добавляет количественную оценку: если в n ящиках сидит N кроликов, то найдётся ящик, в котором сидит не менее $\left\lceil \frac{N}{n} \right\rceil$ кроликов, и найдётся ящик, в котором сидит не более $\left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$ кроликов. Здесь потолок и пол — не формальные излишества, а рабочие инструменты, позволяющие получать нижние и верхние оценки в задачах существования. Классический пример — задача о том, что в любом графе на n вершинах без петель и кратных рёбер найдутся две вершины с одинаковой степенью. Множество возможных степеней — от 0 до $n-1$, всего n значений. Но степень 0 и степень $n-1$ не могут сосуществовать в одном графе (если есть изолированная вершина, то нет вершины, соединённой со всеми). Значит, реально возможных степеней не более $n-1$, а вершин n — принцип Дирихле срабатывает.

В пособии мы сознательно идём от простого к сложному: сначала задачи с явными ящиками (месяцы, дни недели, цвета), затем задачи, где ящики конструируются через остатки, суммы, произведения, и наконец — нестандартные применения, где ящиком становится геометрическая область, подмножество или даже значение функции. Отдельный акцент делается на задачах комбинаторной геометрии: точки в квадрате, точки на окружности, раскраска плоскости. Принцип Дирихле в геометрии — это изящный мостик между дискретной и непрерывной математикой, показывающий, что даже в мире бесконечной делимости работают чисто комбинаторные соображения.

Особую ценность принципу Дирихле придаёт его роль в теории сложности и основаниях математики: многие доказательства существования объектов с заданными свойствами (например, графов Рамсея) опираются именно на него, причём предъявить такой объект явно может быть колоссально трудно или вообще невозможно на текущем уровне знаний. Этот философский аспект принципа — чистое существование без конструкции — заслуживает отдельного обсуждения со студентами, поскольку ломает школьную парадигму «доказать значит предъявить».

2.1.3. Формула включений и исключений

Если правило суммы требует, чтобы множества не пересекались, то формула включений и исключений — это мост через нарушенное условие. Она отвечает на вопрос: как посчитать мощность объединения нескольких множеств, если они могут пересекаться, и пересечения устроены сложно?

Для двух множеств формула интуитивно очевидна: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Мы складываем мощности, но при этом элементы, попавшие в пересечение, учтены дважды — по одному разу в каждом слагаемом. Вычитание пересечения ровно компенсирует этот двойной учёт. Геометрически это видно на диаграмме Венна мгновенно, и мы настоятельно рекомендуем студентам рисовать эти диаграммы всегда, даже когда множеств больше двух — хотя бы для фиксации идеи.

Для трёх множеств логика делает следующий виток. Запись $|A| + |B| + |C|$ трижды считает элементы, лежащие в тройном пересечении, и дважды — элементы, лежащие ровно в двух множествах. Вычитание попарных пересечений $|A \cap B|, |B \cap C|, |A \cap C|$ убирает лишние учёты для пар, но при этом элементы тройного пересечения, которые в сумме были посчитаны трижды, теперь вычитаются трижды и «пропадают» вовсе. Поэтому их нужно вернуть обратно, добавив $|A \cap B \cap C|$. Итоговая формула приобретает характерный знакопеременный вид: плюс, минус, плюс.

Общий случай для n множеств обобщает эту логику. Мощность объединения равна сумме мощностей всех множеств минус сумма мощностей всех попарных пересечений плюс сумма мощностей всех тройных пересечений минус сумма мощностей всех пересечений по четыре и так далее, вплоть до n -го пересечения со знаком $(-1)^{n+1}$. Компактная запись:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|. \quad (1)$$

Доказательство этой формулы — отличный полигон для метода математической индукции. База для $n = 2$ верна. Предполагая формулу верной для $n-1$ множества, мы сводим объединение n множеств к объединению первых $n-1$ с последним, и после аккуратных манипуляций с дистрибутивностью пересечения относительно объединения получаем требуемое. Это доказательство мы приводим в пособии полностью, с промежуточными выкладками и комментариями, поскольку оно не только

обосновывает формулу, но и тренирует технику работы с формальными суммами и индуктивными переходами в комбинаторном контексте.

Однако главная ценность формулы включений и исключений раскрывается не в доказательстве, а в её прикладной мощи. Классическая задача о беспорядках (перестановках, при которых ни один элемент не остаётся на своём месте) решается именно через неё: мы считаем все перестановки, вычитаем те, где хотя бы один элемент фиксирован, затем возвращаем те, где фиксированы хотя бы два, и так далее. Результатом становится красивая формула для субфакториала:

$$!n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad (2)$$

Другой яркий пример — задача о числе целочисленных решений уравнения с ограничениями. Скажем, сколько неотрицательных целых решений у уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, если $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 5$, $x_3 \leq 6$? Здесь универсальным методом является формула включений и исключений: мы берём все решения без ограничений, вычитаем те, где $x_1 > 4$, затем $x_2 > 5$, затем $x_3 > 6$, потом возвращаем попарные нарушения и так далее. Такой подход превращает, казалось бы, переборную задачу в вычислимую за несколько шагов процедуру.

Наконец, мы показываем связь формулы включений и исключений с другими разделами дискретной математики: функцией Эйлера (подсчёт чисел, взаимно простых с данным), задачей о числе сюръекций (отображений «на»), числами Стирлинга второго рода и скринингом в теории чисел (решето Эратосфена как частный случай). Эта система связей позволяет студенту увидеть, что формула — не изолированный приём, а один из центральных конструктивных принципов, пронизывающих всю перечислительную комбинаторику.

2.1.4. Основные комбинаторные схемы

Комбинаторная схема — это формализованный способ построения выборки из заданного множества элементов. В зависимости от двух ключевых параметров — упорядоченности выборки и допустимости повторений — выделяют четыре базовых типа схем. В настоящей главе рассматриваются три из них: размещения без повторений, сочетания без повторений и сочетания с повторениями. Четвёртая схема — размещения с повторениями — будет изучена позднее в связи с биномиальной теоремой.

Размещения без повторений

Пусть задано конечное множество S , мощность которого равна n , и натуральное число k , причём $k \leq n$.

Определение 4. Размещением без повторений из n элементов по k называется любой упорядоченный набор длины k , составленный из попарно различных элементов множества S .

Число всех таких размещений обозначается A_n^k . В зарубежной литературе также распространено обозначение $(n)_k$ — символ Похгаммера (нисходящий факториал).

Вывод формулы для A_n^k опирается непосредственно на правило произведения. Будем заполнять позиции последовательно. На первую позицию можно поместить любой из n элементов. После того как первая позиция занята, использованный элемент исключается из дальнейшего рассмотрения, поэтому на вторую позицию претендуют $n-1$ элементов. Аналогично на третью позицию остаётся $n-2$ варианта. Продолжая рассуждение до k -й позиции включительно, получаем:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \quad (3)$$

Произведение в правой части содержит ровно k сомножителей — по числу заполняемых позиций. Через факториалы формула (3.1) записывается в компактной форме:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4)$$

Пример 1. Группа из двадцати студентов выбирает старосту, заместителя старосты и казначея. Один студент не может занимать более одной должности. Число возможных исходов равно

$$A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Пример 2. Сколько различных трёхбуквенных слов (не обязательно осмысленных) можно составить из десяти различных согласных букв при условии, что буквы в слове не повторяются?

Ответ: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Перестановки.

Частным случаем размещений при $k = n$ являются перестановки — упорядоченные наборы, содержащие все элементы исходного множества ровно по одному разу.

Определение 2. Перестановкой n -элементного множества называется любое размещение из n элементов по n .

Число перестановок обозначается P_n . Из формулы (3) при $k = n$ немедленно следует:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!. \quad (5)$$

Пример 3. Пять книг различных авторов можно расставить на полке $5! = 120$ способами.

Связь с теорией функций. Размещения допускают естественную интерпретацию на языке отображений. Число всех инъективных (разнозначных) отображений из k -элементного множества в n -элементное множество равно A_n^k . Эта эквивалентность часто используется при доказательствах в последующих разделах дискретной математики.

Сочетания без повторений

Если в размещениях порядок элементов был определяющим, то в сочетаниях он исчезает. Интерес представляет только сам факт включения элемента в выборку, но не его позиция внутри неё.

Определение 5. Сочетанием без повторений из n элементов по k (или просто сочетанием) называется любое k -элементное подмножество n -элементного множества.

Число сочетаний обозначается $\binom{n}{k}$ (биномиальный коэффициент) или C_n^k . Далее мы используем биномиальное обозначение.

Для вывода формулы установим связь между размещениями и сочетаниями. Всякое размещение из n по k можно построить в два этапа: сначала выбрать k -элементное подмножество (сочетание), а затем упорядочить его элементы — то есть построить какую-либо перестановку выбранных k элементов. По правилу произведения:

$$A_k^n = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

Отсюда

$$\binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (6)$$

Формула (6) симметрична относительно замены k на $n-k$, что отражает содержательный факт: выбрать k элементов из n — то же самое, что указать $n-k$ элементов, которые не войдут в выборку.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (7)$$

Граничные значения задаются естественным образом: пустое подмножество единственно, полное подмножество также единственно:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \quad (8)$$

Пример 4. В группе из двенадцати студентов необходимо выбрать трёх дежурных, причём все трое выполняют одинаковые обязанности (порядок неважен). Число способов равно $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$.

Если бы каждый дежурный получал уникальное поручение, ответом было бы размещение $A_{12}^3 = 1320$

Пример 5. Из колоды в 36 карт сдают 5. Порядок прихода карт в руку не учитывается. Число возможных комбинаций равно $\binom{36}{5}$. Вычисление даёт 376 992.

Рекуррентное соотношение. Сочетания подчиняются важному рекуррентному равенству, которое лежит в основе треугольника Паскаля:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \quad (9)$$

Докажем (9) комбинаторным рассуждением. Зафиксируем один конкретный элемент исходного множества — обозначим его x . Все k -элементные подмножества множества из $n+1$ элемента разбиваются на два непересекающихся класса. К первому классу относятся подмножества, не содержащие x , — это в точности k -элементные подмножества оставшихся n элементов, их $\binom{n}{k}$. Ко второму классу относятся подмножества, содержащие x , — добавив x к каждому $(k-1)$ -элементному подмножеству оставшихся n элементов, получаем $\binom{n}{k-1}$. По правилу суммы получаем (9).

Альтернативное доказательство — прямая подстановка формулы (6) в правую часть (9) и приведение к общему знаменателю — является несложным алгебраическим упражнением и оставляется читателю. Рекуррентное соотношение будет играть центральную роль в построении биномиальной теоремы.

Сочетания с повторениями

Во всех предыдущих схемах каждый элемент мог быть взят в выборку не более одного раза. Теперь снимем это ограничение.

Определение 4. Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченный набор длины k , в котором каждый из n типов элементов может присутствовать произвольное число раз (включая нуль).

Иными словами, имеется n классов неразличимых между собой объектов, и требуется выбрать ровно k объектов, регистрируя лишь количество взятых объектов каждого класса. Число сочетаний с повторениями обозначается $\widetilde{C}_n^k$ или, в стандартной нотации, $\binom{n}{k}$.

Прямой вывод формулы через правило произведения затруднителен, поскольку классическая схема «первый элемент — столько-то способов, второй — столько-то» предполагает наличие фиксированного резервуара. Здесь резервуар каждого типа неисчерпаем. Для решения задачи применяется метод шаров и перегородок — один из наиболее изящных приёмов элементарной комбинаторики.

Метод шаров и перегородок. Пусть имеются n различных ящиков (соответствующих типам элементов) и k неразличимых шаров (единиц выборки). Задача о сочетаниях с повторениями эквивалентна вопросу: сколькими способами можно разложить k неразличимых шаров по n пронумерованным ящикам?

Изобразим шары в виде ряда из k одинаковых символов (например, $\circ$). Ящики отделяются друг от друга перегородками. Поскольку ящиков n , перегородок требуется ровно $n-1$. Итоговая последовательность состоит из k символов-шаров и $n-1$ символов-перегородок, выстроенных в одну линию. Каждая конкретная расстановка перегородок однозначно определяет количество шаров в каждом ящике: шары, расположенные до первой перегородки, попадают в первый ящик; шары между первой и второй перегородками — во второй; и так далее, до шаров, расположенных после $(n-1)$ -й перегородки, которые попадают в n -й ящик.

Таким образом, задача свелась к подсчёту числа различных строк длины $k+n-1$, составленных из k одинаковых символов одного типа (шары) и $n-1$ одинаковых символов другого типа (перегородки). Число таких строк равно числу способов выбрать k позиций из $k+n-1$ для размещения шаров:

$$\widetilde{C}_n^k = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}. \quad (10)$$

Пример 6. В кондитерской имеются пирожные четырёх сортов. Сколькими способами можно купить шесть пирожных? Здесь $n = 4$, $k = 6$.
 Ответ: $\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$

Пример 7. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$? Каждое решение — это способ распределить 10 единиц по четырём переменным. Ответ: $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{3} = 286$

Дополнительные ограничения. Метод шаров и перегородок допускает естественные модификации для учёта ограничений на значения.

Ограничение снизу. Пусть каждый ящик должен получить хотя бы один шар (в прикладной интерпретации: пирожное каждого сорта нужно купить хотя бы по одному, либо все переменные. Тогда мы предварительно кладём по одному шару в каждый из n ящиков, расходуя n шаров из k . Оставшиеся $k-n$ шаров распределяются без ограничений. Число способов:

$$\binom{(k-n) + n - 1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}. \quad (11)$$

Выражение (11) имеет смысл лишь при $k \geq n$.

Ограничение сверху. Если на каждый ящик наложено ограничение вида $x_i \leq a_i$, метод шаров и перегородок комбинируется с формулой включений и исключений (см. раздел 2.3). Полное решение такой задачи будет приведено в практической части пособия.

Сводная таблица схем. Завершим раздел классификацией базовых комбинаторных схем. Пусть исходное множество содержит n элементов, объём выборки равен k .

Таблица 1. Классификация базовых комбинаторных схем.

Название	Обозначение	Формула
Размещения без повторений	A_n^k	$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Размещения с повторениями	$\overline{A_n^k}$	$\overline{A_n^k} = n^k$
Сочетания без повторений	C_n^k	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Сочетания с повторениями	$\overline{C_n^k}$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}$

Примечания к таблице

Перестановки являются частным случаем размещений без повторений при $k = n$ и обозначаются $P_n = A_n^n = n!$.

Перестановки с повторениями возникают в ситуации, когда множество состоит из элементов нескольких типов, причём элементы одного типа

неразличимы. Если имеется m типов, и число элементов i -го типа равно k_i , то число различных перестановок такого мультимножества равно

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Обозначения $\overline{C}_n^k$ и $\overline{A}_n^k$ с чертой сверху традиционно указывают на допустимость повторений. В некоторых учебниках для размещений с повторениями используется также запись $\widetilde{A}_n^k$, а для сочетаний с повторениями $\widetilde{C}_n^k$ — или H_n^k . Биномиальное обозначение $\binom{n}{k}$ принятое в зарубежной литературе и эквивалентное C_n^k , вводится в следующем пункте в связи с треугольником Паскаля и биномом Ньютона.

2.1.5. Биномиальные коэффициенты

Биномиальные коэффициенты, введённые в предыдущем параграфе как числа сочетаний C_n^k , на самом деле занимают в дискретной математике положение гораздо более высокое, чем просто инструмент для подсчёта подмножеств. Они образуют стройную алгебраическую систему, связывающую комбинаторику с алгеброй многочленов, теорией вероятностей и математическим анализом. Настоящий параграф посвящен двум фундаментальным сюжетам: построению треугольника Паскаля вместе с биномиальной теоремой и выводу основных комбинаторных тождеств, которым подчиняются биномиальные коэффициенты. Доказательства всюду опираются на метод математической индукции и на комбинаторные рассуждения — в зависимости от того, какой путь оказывается прозрачнее в каждом конкретном случае.

Треугольник Паскаля и Бином Ньютона

Начнём с рекуррентного соотношения, которое уже было установлено в предыдущем параграфе: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$. (12)

Геометрически это соотношение описывает способ построения знаменитого треугольника Паскаля — бесконечной треугольной таблицы, в которой крайние члены каждой строки равны единице, а каждый внутренний член получается сложением двух вышестоящих. Приведём начальные строки этой таблицы:

$$\begin{array}{rcl}
n = 0: & & 1 \\
n = 1: & & 1 \quad 1 \\
n = 2: & & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3: & & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4: & & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5: & & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

В n -й строке (нумерация начинается с нуля) стоят числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$. Равенство (12) означает, что каждый элемент строки с номером $n+1$, кроме крайних, является суммой двух ближайших элементов предыдущей строки.

Треугольник Паскаля был известен задолго до самого Паскаля — он встречается в работах индийских, китайских и арабских математиков, — однако именно Блез Паскаль в своём «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654 г.) впервые систематически исследовал его свойства и установил связь с теорией вероятностей.

Центральным результатом, придающим биномиальным коэффициентам их алгебраическое значение, является формула бинома Ньютона.

Теорема 1 (Бином Ньютона). Для любого натурального n и любых действительных (или комплексных) чисел a и b справедливо разложение:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{(n-k)} b^k \quad (13)$$

Доказательство методом математической индукции. Проведём индукцию по показателю степени n .

База индукции. При $n=1$ левая часть равна $a + b$. Правая часть: $C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$. Равенство выполнено.

Индуктивное предположение. Допустим, что формула (13) верна для некоторого n , то есть $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Индуктивный шаг. Рассмотрим $(a + b)^{n+1}$. Представим его как $(a + b)^n (a + b)^1$ и воспользуемся индуктивным предположением:

$$(a + b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \right) (a + b)^1$$

Раскроем скобки, умножая каждое слагаемое суммы сначала на a , затем на b :

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1}.$$

Во второй сумме сдвинем индекс суммирования, положив $j=k+1$. Тогда $k = j-1$, и при изменении k от 0 до n переменная j изменяется от 1 до $n+1$. Получаем:

$$= C_n^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + C_n^n b^{n+1}.$$

Здесь мы отдельно выписали первое слагаемое первой суммы (при $k=0$) и последнее слагаемое второй суммы (при $j=n+1$). Для внутренних членов с индексами $k = 1, \dots, n$ коэффициент равен сумме двух биномиальных коэффициентов. Применяя рекуррентное соотношение (12), получаем $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Кроме того, $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$ и $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$. Таким образом:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Формула (13) верна и для показателя $n+1$. Индуктивный шаг завершён. ■

Следствия биномиальной теоремы. Подстановка конкретных значений a и b даёт ряд полезных тождеств. При $a = b = 1$ получаем:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n. \quad (14)$$

Сумма всех биномиальных коэффициентов n -й строки равна 2^n . Геометрически это означает, что число всех подмножеств n -элементного множества равно 2^n , — факт, уже известный из правила произведения (каждый элемент либо включается, либо нет). Равенство (14) подтверждает согласованность двух подходов.

При $a=1, b=-1$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0, \quad n \geq 1. \quad (15)$$

Переносим отрицательные слагаемые в правую часть, получаем равенство сумм коэффициентов с чётными и нечётными номерами:

$$\sum_{k \text{ чётн}} C_n^k = \sum_{k \text{ нечётн}} C_n^k = 2^{n-1}. \quad (16)$$

При $a=1$ и произвольном $b=x$ формула (13) превращается в многочлен:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Этот вид особенно удобен для доказательства тождеств дифференцированием и интегрированием — приём, который мы кратко демонстрируем в следующем параграфе.

2.1.6. Комбинаторные тождества

Биномиальные коэффициенты связаны десятками тождеств, многие из которых допускают как алгебраическое, так и чисто комбинаторное доказательство. Ниже приведены основные тождества, наиболее часто встречающиеся в учебных задачах.

Тождество 1 (правило симметрии).

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (17)$$

Комбинаторный смысл: выбор k элементов равносильно указанию $n-k$ элементов, остающихся вне выборки. Алгебраически следует из формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ непосредственно.

Тождество 2 (вынесение за скобки).

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (18)$$

Комбинаторное доказательство: подсчитаем число способов выбрать из n человек команду из k человек и назначить в ней капитана. Можно сначала выбрать команду (C_n^k способов), а затем из неё капитана (k вариантов) — всего kC_n^k . А можно сначала назначить капитана (n вариантов), а затем доукомплектовать команду $k-1$ игроками из оставшихся $n-1$ человек (C_{n-1}^{k-1} способов) — всего nC_{n-1}^{k-1} . Оба подсчёта дают одно и то же число.

Тождество 3 (свёртка Вандермонда).

$$\sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j} = C_{m+n}^k. \quad (19)$$

Комбинаторное доказательство прозрачно: левая часть подсчитывает число способов выбрать k элементов из объединения двух непересекающихся множеств мощностей m и n , разбивая выбор на j элементов из первого множества и $k-j$ элементов из второго. Суммирование по всем возможным j даёт полное число k -элементных подмножеств объединённого множества, то есть правую часть.

Частный случай $m=n$ даёт полезное тождество:

$$\sum_{j=0}^k (C_n^j)^2 = C_{2n}^n. \quad (20)$$

Тождество 4 (суммирование по верхнему индексу).

$$\sum_{m=0}^n C_m^k = C_{n+1}^{k+1}. \quad (21)$$

Доказательство легко провести индукцией по n , опираясь на рекуррентное соотношение (12). Комбинаторная интерпретация — через выбор $k+1$ элемента из $n+1$ с фиксацией максимального номера выбранного элемента — также весьма поучительна.

Тождество 5 (знакопеременная сумма).

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m, \quad (m < n). \quad (21)$$

Это тождество доказывается индукцией по m и часто используется в комбинаторных оценках.

Все перечисленные тождества сопровождаются в практической части пособия подробно разобранными примерами и задачами. Мы настойчиво рекомендуем для каждого тождества пытаться найти и алгебраическое доказательство, использующее факториальную формулу или производящие функции, и комбинаторное, опирающееся на подсчёт одного и того же множества объектов двумя разными способами. Умение переключаться между этими двумя языками — один из главных навыков, формируемых курсом.

2.1.7. Специальные комбинаторные числа

Комбинаторика не исчерпывается биномиальными коэффициентами. Существуют целые семейства чисел, возникающих в конкретных перечислительных задачах и обладающих богатой внутренней структурой. В этой главе мы рассмотрим три наиболее известных класса: числа Фибоначчи, числа Каталана и субфакториалы. Для каждого класса будет установлено рекуррентное соотношение, найдена (где возможно) замкнутая форма и даны основные комбинаторные интерпретации. Сквозной линией главы проходит метод математической индукции — основной инструмент доказательства свойств рекурсивно заданных последовательностей.

2.1.8. Числа Фибоначчи

Определение 6. Последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ задаётся рекуррентным соотношением:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \quad (22)$$

Исторически последовательность появилась в трактате Леонардо Пизанского (Фибоначчи) «Liber Abaci» (1202 г.) в задаче о размножении кроликов. Однако комбинаторные интерпретации чисел Фибоначчи гораздо разнообразнее.

Комбинаторные интерпретации.

Интерпретация 1. Число F_{n+1} равно количеству способов замостить полосу размера $1 \times n$ квадратами 1×1 и домино 1×2 . Действительно, для полосы длины 1 имеется один способ (квадрат) — $F_2 = 1$. Для полосы длины 2 — два способа (два квадрата или одно домино) — $F_3 = 2$. Для полосы длины n рассмотрим первую плитку: если это квадрат, остаётся полоска длины $n-1$ (её можно замостить F_n способами); если домино — остаётся полоска длины $n-2$ (F_{n-1} способов). Получаем в точности рекурренту (22).

Интерпретация 2. Число F_{n+1} равно количеству подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих элементов. При $n=3$ такие подмножества: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$ — всего 5, что равно F_4 .

Замкнутая формула (формула Бине). Линейное рекуррентное соотношение (5.1) с постоянными коэффициентами решается стандартным методом характеристического уравнения. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 = \lambda + 1$, его корни:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Общее решение: $F_n = A\varphi^n + B\psi^n$. Константы определяются из начальных условий $F_1 = F_2 = 1$. Окончательно:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (23)$$

Формула (23) замечательна тем, что выражает целое число через иррациональности, причём второе слагаемое ψ^n быстро стремится к нулю, так что F_n — ближайшее целое к $\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$.

Свойства чисел Фибоначчи. Приведём несколько важных тождеств, доказываемых, как правило, индукцией. Доказательства первых двух разбираются в практической части подробно; остальные выносятся в задачи.

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1. \quad (24)$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \quad (25)$$

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m. \quad (26)$$

$$\text{НОД}(F_m, F_n) = F_{\text{НОД}(m,n)}. \quad (27)$$

Тождество (27) — одно из самых глубоких свойств чисел Фибоначчи, связывающее их с алгоритмом Евклида. Его доказательство требует более тонкой индукции и рассматривается отдельно.

2.1.9. Числа Каталана

Числа Каталана — возможно, самый вездесущий класс комбинаторных чисел после биномиальных коэффициентов. Они возникают в задачах о скобочных последовательностях, триангуляции многоугольников, путях на решётке и десятках других сюжетов.

Определение 7. Числа Каталана C_n (не путать с обозначением сочетаний C_n^k ; в литературе для чисел Каталана традиционно используется та же буква, что иногда вызывает путаницу) определяются формулой:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \quad n \geq 0. \quad (28)$$

Первые несколько чисел Каталана: $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132$.

Рекуррентное соотношение. Числа Каталана удовлетворяют нелинейному рекуррентному соотношению:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \quad n \geq 1. \quad (29)$$

Формула (29) получается из анализа структуры объекта: если сложный объект, пересчитываемый числами Каталана, можно разрезать на две

независимые части, то полное число способов равно свёртке чисел способов для частей.

Комбинаторная интерпретация: правильные скобочные последовательности. Рассмотрим всевозможные строки длины $2n$, состоящие из n открывающих и n закрывающих скобок, такие, что в любом начальном фрагменте строки число открывающих скобок не меньше числа закрывающих. Такие строки называются правильными скобочными последовательностями. Число таких последовательностей равно C_n .

При $n=3$ все пять вариантов: $((()))$, $((()))$, $(())()$, $()(())$, $()()()$.

Вывод формулы (28) через принцип отражения. Общее число строк из n открывающих и n закрывающих скобок равно C_{2n}^n — нужно выбрать n позиций из $2n$ для открывающих скобок. Среди них есть «неправильные». Подсчитаем число неправильных строк методом отражения (принцип Андре). В неправильной строке найдётся первый момент, когда закрывающих скобок стало больше, чем открывающих, — в этой позиции закрывающая скобка перевешивает. Инвертируем все скобки после этой позиции: открывающие заменим на закрывающие, и наоборот. Полученная строка будет содержать $n+1$ открывающую и $n-1$ закрывающую скобку. Это отображение — биекция между множеством неправильных строк и множеством всех строк из $n+1$ открывающей и $n-1$ закрывающей скобок, число которых равно C_{2n}^{n+1} . Следовательно, число правильных строк:

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Это доказательство — жемчужина комбинаторики, и мы настоятельно рекомендуем разобрать его до полной ясности.

Другие интерпретации. Число Каталана C_n также равно:

- количеству способов триангулировать выпуклый $(n+2)$ -угольник непересекающимися диагоналями;
- количеству монотонных путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) , не поднимающихся выше диагонали;
- количеству способов расставить скобки в произведении $n+1$ множителя, задавая порядок умножения (задача о числе бинарных деревьев с $n+1$ листьями).

2.1.10. Субфакториал и задача о беспорядках

Задача о беспорядках — классический пример применения формулы включений и исключений, рассмотренной ранее. Здесь мы доводим её до аналитической формулы и изучаем свойства получившейся числовой последовательности.

Определение 8. Беспорядком (или перестановкой без неподвижных точек) называется перестановка n -элементного множества, в которой ни один элемент не остаётся на своём исходном месте. Число беспорядков n -элементного множества называется субфакториалом и обозначается $!n$.

Вычисление $!n$. Применим формулу включений и исключений. Обозначим через A_i множество перестановок, в которых элемент i остаётся на месте. Мощность пересечения любых k множеств A_i равна $(n-k)!$ — числу перестановок, фиксирующих выделенные k элементов. По формуле включений и исключений число перестановок, не входящих ни в одно A_i , равно:

$$!n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot 0!.$$

Упрощая с учётом $C_n^k(n-k)! = \frac{n!}{k!}$, получаем:

$$!n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \quad (30)$$

Первые значения: $!1=0$, $!2=1$, $!3=2$, $!4=9$, $!5=44$.

Связь с экспонентой. Ряд в формуле (30) — это частичная сумма ряда Тейлора функции e^x в точке $x = (-1)$. Отсюда следует красивый факт:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{!n}{n!} = e^{-1} \approx 0,367879 \dots$$

Доля беспорядков среди всех перестановок с ростом n стремится к $\frac{1}{e}$. Этот результат имеет вероятностную интерпретацию и находит применение в статистике.

Рекуррентное соотношение. Субфакториалы, как и числа Фибоначчи, подчиняются рекурренте, хотя и нелинейного вида:

$$!n = (n-1)(!(n-1) + !(n-2)), \quad n \geq 2 \quad (31)$$

с начальными условиями $!0=1$, $!1=0$.

Доказательство (31) комбинаторно. Рассмотрим элемент с номером n . В беспорядке он должен занять позицию некоторого элемента $i \neq n$ ($n-1$ возможных вариантов). Далее возможны два случая. Если элемент i встал на позицию n (они обменялись местами), то оставшиеся $n-2$ элемента должны образовать беспорядок на своих местах — $!(n-2)$ вариантов. Если же элемент i не попал на позицию n , то ситуация сводится к построению беспорядка на $n-1$ элементе — $!(n-1)$ вариантов. Суммируя по всем $n-1$ вариантам выбора i , получаем рекурренту (31).

Задача о письмах и конвертах. Историческая формулировка задачи Монмора (1708 г.): некто написал n писем и адресовал n конвертов, после чего разложил письма по конвертам наугад. Какова вероятность, что ни одно письмо не попадёт в свой конверт? Ответ: $\frac{!n}{n!}$. При больших n вероятность практически не зависит от n и составляет примерно 0,368.

1.2. Практический раздел

Задачи для самостоятельного решения

Настоящий раздел содержит три блока задач, соответствующих основным темам пособия. Задачи разбиты по уровню сложности: базовый (○), средний (◇) и повышенный (☆). Ответы к большинству задач приведены в конце раздела; для задач повышенной сложности даны краткие указания.

Блок 1. Метод математической индукции

1.1 ○ Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

1.2 ○ Докажите, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.3 ○ Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $7^n - 1$ делится на 6.

1.4 ○ Докажите неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для любого натурального n и любого действительного $x \geq -1$.

1.5 ◇ Докажите, что для любого натурального n справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

1.6 ◇ Докажите, что для любого натурального n число $n^2 + 5n$ делится на 6.

1.7 ◇ Пользуясь сильной индукцией, докажите, что любое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых чисел.

1.8 ☆ (Контрпример) Найдите ошибку в следующем «доказательстве».

Утверждение: все лошади имеют одинаковую масть. Доказательство: индукция по числу лошадей в табуне. База: одна лошадь — масть одна. Шаг: в табуне из $n+1$ лошади уберём одну, оставшиеся n имеют одну масть по предположению. Вернём убранную и уберём другую — оставшиеся снова

одной масти. Значит, все $n+1$ имеют одинаковую масть.

1.9 ☆ Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n+1}, \quad (n \geq 5).$$

Блок 2. Комбинаторные схемы

2.1 ○ Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из группы в 15 студентов?

2.2 ○ В турнире участвуют 8 шахматистов. Каждый играет с каждым ровно одну партию. Сколько всего партий будет сыграно?

2.3 ○ Сколькими способами можно составить расписание на понедельник из пяти различных уроков, если всего изучается 12 дисциплин и порядок уроков важен?

2.4 ○ Сколькими способами 10 различных книг можно расставить на полке, если три конкретные книги должны стоять рядом?

2.5 ◇ Сколько различных «слов» (не обязательно осмысленных) можно составить, переставляя буквы слова «МАТЕМАТИКА»?

2.6 ◇ В продаже имеются шарики семи цветов. Сколькими способами можно купить 12 шариков? Порядок шариков неважен, шарики одного цвета неразличимы.

2.7 ◇ Сколько существует целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$?

2.8 ◇ Сколько существует целых неотрицательных решений того же уравнения, если дополнительно требуется $x_1 \geq 3, x_2 \geq 1$, а на остальные переменные ограничений нет?

2.9 ☆ Из колоды в 52 карты одновременно вынимают 5 карт. Сколько существует комбинаций, содержащих ровно два туза и ровно три карты бубновой масти? (Карта может быть одновременно и тузом, и бубной.)

2.10 ☆ Сколько существует способов раздать 12 одинаковых конфет четверым детям так, чтобы каждый получил хотя бы по одной конфете, но не более пяти?

Блок 3. Биномиальные коэффициенты и комбинаторные числа

3.1 ○ Пользуясь биномом Ньютона, найдите разложение $(x + 2)^2$.

3.2 ○ Вычислите сумму $C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$.

3.3 ○ Найдите значение выражения $C_{10}^0 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - \dots + C_{10}^{10}$.

3.4 ◇ Докажите тождество $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$ (при $n \geq 1$).

3.5 ◇ Пользуясь свёрткой Вандермонда, вычислите $\sum_{k=0}^5 C_8^k C_7^{5-k}$.

3.6 ◇ Вычислите десятое число Фибоначчи F_{10} .

3.7 ◇ Докажите по индукции, что $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

3.8 ◇ Вычислите C_5 по формуле (28) и проверьте через рекурренту (29).

3.9 ◇ Сколькими способами можно построить правильную скобочную последовательность из шести пар скобок?

3.10 ◇ На полке стоят 5 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не оказалась на своём исходном месте?

3.11 ☆ Докажите, что C_n — целое число для любого n .

3.12 ☆ Пользуясь формулой включений и исключений, найдите количество целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, при условиях, что $0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 6$.

Ответы и указания

- 1.1. База индукции: при $n = 1$ утверждение принимает вид $1 = 1^2$ — верно. Индуктивное предположение: допустим, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Индуктивный шаг: добавим к обеим частям следующее нечётное число $(2k + 1)$. Левая часть превращается в сумму первых $k + 1$ нечётных чисел. Правая часть: $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Равенство выполнено для $n = k + 1$. Следовательно, по принципу математической индукции формула верна при всех натуральных n .
- 1.2. Обозначим $S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. База: $n = 1$. $S(1) = 1$. Правая часть: $1 \cdot 2 \cdot 3 / 6 = 1$. Верно. Предположим, что $S(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Тогда $S(k + 1) = S(k) + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$. Приводим к общему знаменателю 6: $S(k + 1) = \frac{[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2]}{6} = \frac{[(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))]}{6} = \frac{[(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)]}{6} = \frac{[(k+1)(2k^2 + 7k + 6)]}{6}$. Разложим $2k^2 + 7k + 6$ на множители: корни квадратного трёхчлена $k = -2$ и $k = -\frac{3}{2}$, следовательно, $2k^2 + 7k + 6 = (k + 2)(2k + 3)$. Тогда: $S(k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$. Формула верна для $n = k + 1$.
- 1.3. База: $n = 1$. $7^1 - 1 = 6$, что кратно 6. Предположим, что $7^k - 1$ кратно 6, то есть $7^k - 1 = 6m$. Рассмотрим $n = k + 1$: $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7 \cdot (6m + 1) - 1 = 42m + 7 - 1 = 42m + 6 = 6(7m + 1)$. Полученное выражение кратно 6. Шаг доказан.
- 1.4. (Неравенство Бернулли) Утверждение: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для любого натурального n и любого $x \geq -1$. База: $n = 1$. Левая часть: $1 + x$. Правая: $1 + x$. Неравенство выполнено как равенство. Индуктивное предположение: $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Индуктивный шаг: $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k \cdot (1 + x)$. Так как $x \geq -1$, множитель $(1 + x) \geq 0$, и направление неравенства при умножении сохраняется: $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2$. Поскольку $kx^2 \geq 0$, правая часть не меньше чем $1 +$

$(k + 1)x$. Следовательно, $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$. Неравенство доказано для всех n .

- 1.5. Указание. Примените индукцию. Базу $n = 1$ проверьте непосредственно: $\frac{1}{2} > \frac{13}{24}$? Приведём к общему знаменателю: $\frac{12}{24} > \frac{13}{24}$ — неверно. Следовательно, утверждение в задаче, по-видимому, начинает выполняться с некоторого n . Проверьте базу для $n = 2$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0,583$; $\frac{13}{24} \approx 0,541$. Для $n = 2$ утверждение верно. Далее индуктивный переход: пусть сумма для $n = k$ больше $\frac{13}{24}$. При переходе к $n = k + 1$ сумма заменяется: убирается слагаемое $\frac{1}{k+1}$, добавляются $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$. Покажите, что разность между новой и старой суммами положительна, то есть сумма возрастает с ростом n . Тогда из справедливости для $n = 2$ автоматически следует справедливость для всех больших n . Альтернативный способ — оценить сумму снизу интегралом.
- 1.6. База $n = 1$: $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$ делится на 6. Предположим, что $k^3 + 5k$ кратно 6. Рассмотрим $(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6$. Первое слагаемое кратно 6 по предположению. Третье слагаемое 6 кратно 6. Остаётся показать, что $3k^2 + 3k = 3k(k + 1)$ кратно 6. Произведение $k(k + 1)$ чётно при любом целом k , так как из двух подряд идущих целых чисел одно обязательно чётно. Следовательно, $k(k + 1) = 2m$, и тогда $3 \cdot 2m = 6m$ кратно 6. Сумма трёх слагаемых, кратных 6, также кратна 6. Шаг завершён.
- 1.7. Применим сильную индукцию. База: $n = 2$ — простое число, представление тривиально (само себя). Предположим, что для всех целых чисел m , таких что $2 \leq m \leq k$, утверждение верно. Рассмотрим число $k + 1$. Если $k + 1$ — простое, оно является своим представлением. Если составное, то $k + 1 = a \cdot b$, где $2 \leq a, b \leq k$. По индуктивному предположению, и a , и b представимы в виде произведения простых. Перемножив эти представления, получим представление $k + 1$. Утверждение доказано для всех $n \geq 2$.
- 1.8. Ошибка находится в индуктивном шаге при переходе от $n = 1$ к $n = 2$. Когда в табуне две лошади, рассуждение предписывает: «уберём одну, оставшаяся имеет одну масть; вернём её и уберём другую —

оставшаяся снова одной масти». Но в каждом из этих двух случаев остаётся ровно одна лошадь, и её масть совпадает с мастью самой себя. Из этого не следует, что масти двух лошадей совпадают между собой: для вывода требовалось бы, чтобы существовала третья лошадь, которая входила бы в оба «урезанных» табуна и служила связующим звеном. При $n = 1$ такая лошадь отсутствует. Таким образом, индуктивный переход работает для всех $n \geq 2$, но разрыв между $n = 1$ и $n = 2$ фатален для всего доказательства.

- 1.9. Проверим базу для $n = 5$: левая часть $= \frac{2^5}{5!} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15} \approx 0,267$. Правая часть $= \frac{4}{5+1} = \frac{4}{6} \approx 0,667$. Неравенство $0,267 \leq 0,667$ выполнено. Индуктивный шаг: пусть неравенство выполнено для $n = k$ ($k \geq 5$): $\frac{2^k}{k!} \leq \frac{4}{k+1}$. Рассмотрим $n = k + 1$: $\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \left(\frac{2^k}{k!}\right) \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right) \leq \left(\frac{4}{k+1}\right) \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right) = \frac{8}{(k+1)^2}$. Требуется доказать, что $8/(k+1)^2 \leq \frac{4}{k+2}$. Преобразуем: $\frac{8}{(k+1)^2} \leq \frac{4}{k+2} \Leftrightarrow \frac{2}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k+2} \Leftrightarrow 2(k+2) \leq (k+1)^2$. Раскроем скобки: $2k + 4 \leq k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 4 \leq k^2 + 1 \Leftrightarrow k^2 \geq 3$. При $k \geq 5$ это очевидно выполняется. Неравенство доказано.

2.1. $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 455$.

- 2.2. Каждая партия — это неупорядоченная пара шахматистов. Число партий: $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$.

- 2.3. Порядок уроков важен, повторения невозможны:
 $A_{12}^5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$

- 2.4. Три конкретные книги, которые должны стоять рядом, мысленно «склеиваем» в один блок. Тогда имеется 7 обычных книг + 1 блок = 8 объектов. Число перестановок этих объектов: $8!$. Внутри блока три книги можно переставить $3!$ способами. Общее число: $8! \cdot 3! = 40\,320 \cdot 6 = 241\,920$.

- 2.5. В слове МАТЕМАТИКА 10 букв. Буква М повторяется 2 раза, А — 3 раза, Т — 2 раза, Е, И, К — по одному разу. Число различных перестановок: $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{2 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3628800}{24} = 151200$.

- 2.6. Сочетания с повторениями: 7 цветов, выбираем 12 шариков.
Обозначение: $\widetilde{C}_{12}^7 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{720} = 18564$.
- 2.7. Число неотрицательных целых решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$
равно числу сочетаний с повторениями $\widetilde{C}_{20}^5 = 10626$.
- 2.8. Положим $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$, $y_5 = x_5$.
Тогда $y_1, \dots, y_5 \geq 0$ и $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 - 3 - 1 = 16$.
Число решений: $\widetilde{C}_{16}^5 = 4\,845$.
- 2.9. Указание. Требуется разобрать случаи, связанные с бубновым тузом (Туз Бубён), так как он одновременно и туз, и бубновая карта. Случай 1. Туз Бубён не входит в пятёрку. Тогда двух тузов выбираем из трёх оставшихся тузов: $C_3^2 = 3$ способа. Три бубновые карты (без туза) выбираем из 12 оставшихся бубён: $C_{12}^3 = 220$. Итого: $3 \cdot 220 = 660$. Но необходимо проверить, нет ли пересечений между выбранными картами. В этом случае тузы — не бубны, бубны — не тузы, множества не пересекаются. Ответ для случая 1: 660. Случай 2. Туз Бубён входит в пятёрку. Тогда он закрывает одновременно и одного из двух требуемых тузов, и одну из трёх бубён. Оставшиеся: нужно выбрать ещё одного туза из трёх ($C(3,1) = 3$), ещё две бубны из 12 ($C_{12}^2 = 66$), и ещё одну карту, которая не является ни тузом, ни бубной. Три оставшихся туза и 12 оставшихся бубён исключены. В колоде 52 карты, из них 4 туза и 13 бубён, при этом туз бубён учтён дважды. Всего «запретных» карт: $4 + 13 - 1 = 16$. Разрешённых: $52 - 16 = 36$. Однако мы уже выбрали 4 карты (туз бубён + 1 туз + 2 бубны), осталась 1 карта, и выбирать её надо из разрешённых 36. Итого для случая 2: $3 \cdot 66 \cdot 36 = 7\,128$. Суммируем случаи: $660 + 7\,128 = 7\,788$. (Примечание: при решении важно аккуратно исключать повторный учёт бубнового туза и учитывать, что остальные выбранные тузы не должны быть бубновыми, а бубны — тузами; в случае 2 это обеспечивается автоматически выбором из множеств, не содержащих туза бубён.)
- 2.10. Сначала дадим каждому из четверых детей по одной конфете (расходуем 4 конфеты из 12). Остаётся 8 одинаковых конфет, которые

нужно распределить без ограничений: число способов = $C(4+8-1, 8) = C(11,3) = 165$. Теперь вычтем распределения, в которых хотя бы один ребёнок получает более пяти конфет (что после выдачи одной соответствует более чем 4 дополнительным конфетам). Пусть A_i — множество распределений, где i -й ребёнок получает ≥ 5 дополнительных конфет (т.е. всего ≥ 6). Зафиксируем: дадим i -му ребёнку сразу 5 дополнительных (сверх одной обязательной), останется 3 конфеты на четверых: $C(4+3-1, 3) = C(6,3) = 20$. Таких множеств четыре штуки. Попарные пересечения: чтобы двое детей получили ≥ 5 дополнительных, нужно отдать им в сумме 10 конфет, что превышает 8 имеющихся. Следовательно, попарные пересечения пусты. По формуле включений и исключений: $165 - 4 \cdot 20 = 165 - 80 = 85$. Ответ: 85.

3.1. $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

3.2. $2^7 = 128$

3.3. $0^{10} = 0$

3.4. 2^{n-1}

3.5. 3 003

3.6. 55

3.7. База $n=1$, Шаг: $F_{k+1} \cdot F_{k+2}$.

3.8. По формуле: $\binom{1}{6} \cdot C(10,5) = \binom{1}{6} \cdot 252 = 42$. Проверка через рекурренту: $14+5+4+5+14 = 42$. Сходится.

3.9. Число правильных скобочных последовательностей из трёх пар скобок ($n=3$) равно $C_3 = 5$. Конкретно: $((()))$, $(())()$, $(())()$, $()(())$, $()()()$.

3.10. Субфакториал $!5 = 5! \cdot (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 120 \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}) = 120 \cdot (0 + 0,5 - 0,1666... + 0,04166... - 0,00833...) = 120 \cdot (0,36666...) = 44$. Ответ: 44.

3.11. Указание. Оба биномиальных коэффициента являются целыми числами, их разность также целое число. Более того, можно показать, что $C(2n, n+1) = C(2n, n) \cdot \frac{n}{n+1}$, откуда $Cn = \frac{C(2n, n)}{n+1}$ — целое.

3.12. Ответ 10.

Приложение. Справочник формул

Настоящее приложение содержит компактный свод основных определений и формул, распределённых по тематическим разделам пособия. Приводимые формулы снабжены минимальными комментариями; подробные выводы читатель найдёт в соответствующих главах.

А. Метод математической индукции

Принцип математической индукции. Пусть утверждение $P(n)$ определено для всех натуральных $n \geq n_0$. Если:

1. $P(n_0)$ истинно (база индукции),
2. из истинности $P(k)$ для произвольного $k \geq n_0$ следует истинность $P(k+1)$ (индуктивный переход), то $P(n)$ истинно при всех $n \geq n_0$.

Сильная индукция. Если из истинности $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(k)$ следует истинность $P(k+1)$, то $P(n)$ истинно при всех $n \geq n_0$.

Б. Правила комбинаторики

Правило суммы: $|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B = \emptyset$.

Правило произведения: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Принцип Дирихле (простая форма): если $n+1$ объект размещён в n ящиках, то хотя бы в одном ящике находится не менее двух объектов.

Принцип Дирихле (обобщённая форма): если N объектов размещены в n ящиках, то существует ящик, содержащий не менее $\lceil \frac{N}{n} \rceil$ объектов, и ящик, содержащий не более $\lfloor \frac{N}{n} \rfloor$ объектов.

Формула включений и исключений:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

В. Комбинаторные схемы

Схема	Обозначение	Формула
Размещения без повторений	A_n^k	$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Размещения без повторений	A_n^k	$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Размещения с повторениями	$\overline{A_n^k}$	$\overline{A_n^k} = n^k$
Сочетания без повторений	C_n^k	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Сочетания с повторениями	$\overline{C_n^k}$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}$
Перестановки	P_n	$n!$

Г. Биномиальные коэффициенты и тождества

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{(n-k)} b^k$$

Основные тождества:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, \quad k \geq 1;$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$\sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j} = C_{m+n}^k \quad (\text{свёртка Вандермонда});$$

$$\sum_{j=0}^k (C_n^j)^2 = C_{2n}^n;$$

$$\sum_{m=0}^n C_m^k = C_{n+1}^{k+1}$$

Д. Числа Фибоначчи

Рекуррента: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3).$

Формула Бине: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\varphi)^n - (\psi)^n)$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Е. Числа Каталана

Формула: $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \quad n \geq 0.$

Рекуррента: $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \quad n \geq 1.$

Начальные значения: $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132.$

Ж. Субфакториалы

Формула: $!n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$

Рекуррента: $!n = (n-1)(!(n-1) + !(n-2)), \quad n \geq 2$

Асимптотика: $!n \sim \frac{n!}{e}$

Рекомендуемая литература для студентов

1. Антипов И. Н., Виленкин Н. Я. Избранные вопросы математики. — Москва : Просвещение, 1979.
2. Болдырева М. Х., Дворянинов С. В. и др. Избранные вопросы школьного курса математики. — Выпуск № 1. — Самара : СИПКРО, 2001.
3. Универсальная энциклопедия школьника. Математика и программирование. — Минск : ТОО «Харвест», 1996. — С. 176–178.
4. Шахно К. У. Элементарная математика для окончивших среднюю школу. — Ленинград, 1976. — С. 46–53.

Библиографический список

1. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. — Москва : Наука, 1987. — 396 с.
2. Виленкин Н. Я. и др. Алгебра и математический анализ 10. — Москва : Просвещение, 1992. — С. 39–49.
3. Згонник А. С. Метод математической индукции для чайников. Примеры решения задач [Электронный ресурс] // МатБюро : сайт А. С. Згонник. — URL: https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmmmi (дата обращения: 20.04.2026).
4. Зиновьев, П. В. Метод математической индукции : учебное пособие : для студентов, обучающихся по укрупненным группам направлений подготовки «Математические и естественные науки», «Инженерное дело, технологии и технические науки» / П. В. Зиновьев ; Дальневосточный федеральный университет. — Владивосток : [б. и.], 2019. — 2,6 усл. печ. л. — 25 экз.
5. Пособие по математике для поступающих в вузы / под ред. Г. Н. Яковлева. — Москва : Наука, 1981. — С. 47–51.
6. Рубанов И. С. Как обучать методу математической индукции // Математика в школе. — 1996. — № 1. — С. 14–20.
7. Соломинский И. С. Метод математической индукции. — Москва : Наука, 1974. — 63 с.
8. Соломинский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. — Москва : Наука, 1967. — С. 7–59.

Учебное издание

Илья Сергеевич Поломошнов

Математическая индукция с примерами решений

Учебное пособие

Компьютерная верстка _____

Свидетельство о государственной регистрации
№2670 от 11 августа 2017 г.

Подписано в печать «__»_____ 2026 г. Формат _____
Уч.-изд. л. _____ Усл. печ. л. _____ Тираж ____ экз. Зака ____
Цена свободная.

Издательство Бурятского госуниверситета имени Доржи Банзарова
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
rio@bsu.ru

Отпечатано в типографии Издательства
Бурятского госуниверситета имени Доржи Банзарова
67000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а